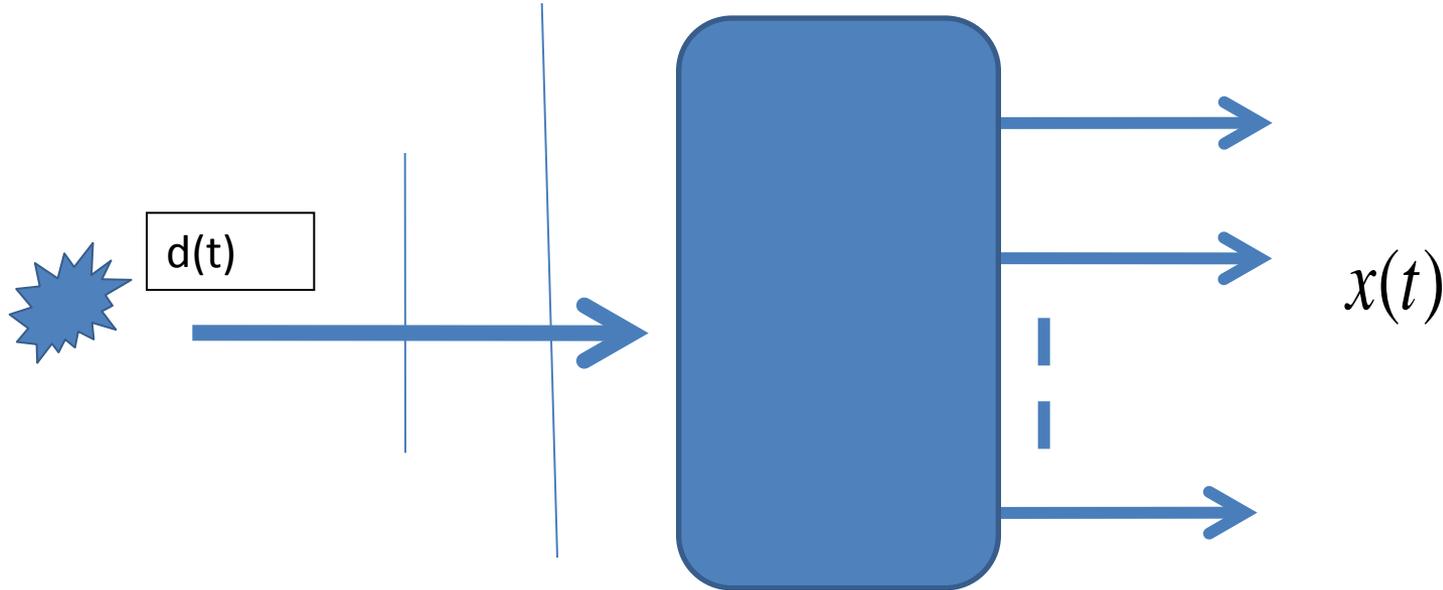


ANALISIS ESPECTRAL

Procesado de Señal
Miguel A. Lagunas

La Densidad Espectral



Iluminado con luz blanca, el contenido del material determina que ciertas longitudes de onda sean absorbidas. De este modo, la densidad espectral será baja (W./Hz.) en las frecuencias de absorción que revelan el contenido del correspondiente compuesto molécula o proteína.

APLICACIONES:

- **Detección y localización de sinusoides en ruido (detección de tonos)**
La densidad espectral de un proceso revela:
- **Determinación de la respuesta de sistemas lineales:**
El punto de banda de un proceso.
- **Análisis de Espectro.**
Analizadores de frecuencia de resonancia o periodicidades presentes.
- **Detección de ángulo de llegada en arrays**
(comunicaciones, radar, sonar, GPS).
Su FT inversa proporciona la función/matriz de auto correlación.
- Los mínimos muestran las anti resonancias del proceso o frecuencias de absorción.
- **Seguimiento de ritmos en EEG.**
- Acústica de salas (Caracterización)
- Detección y ajuste sobretonos
- Seguimiento y localización de ruido en medioambiente
- Seguimiento no intrusivo de máquinas
- Sistemas de codificación de fuente
- Caracterización de materiales
- Espectros de absorción
- Clasificación de sistemas radiantes y radioastronomía
- etc.

¿Cual es la dificultad al estimar la densidad espectral?

Al examinar la definición de la densidad espectral y escribir su estimación mas directa, se aprecian los dos grandes problemas.

$$S(\omega) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{\underline{S}^H \underline{S}} \underline{S}^H \underline{RS} = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{Q} \underline{S}^H \underline{RS}$$

$$\hat{S}(w) = \frac{1}{Q} \underline{S}^H \underline{RS}$$

Tan solo Q valores son conocidos

Los Q valores se han de estimar de los datos

Así pues, por un lado los segmentos (Q) han de ser lo mas largos posibles, pero para la calidad de la estimación de R el numero de segmentos ha de ser también lo mas grande posible, en definitiva, un problema imposible de resolver para un conjunto finito de N datos o muestras de $x(n)$

El Periodograma

La primera aproximación a la estimación de la densidad espectral de potencia, dadas Q muestras de una señal $x(n)$, sería:

Calcular la densidad de energía (energía/Hz.) que para una señal de Q muestras sería:

$$\left| \underline{S}^H \underline{X}_n \right|^2 \quad \text{julios/Hz.}$$

Nótese que la densidad de energía puede escribirse también como:

$$\left| \underline{S}^H \underline{X}_n \right|^2 = \underline{S}^H \left(\underline{X}_n \underline{X}_n^H \right) \underline{S}$$

Como se desea densidad de potencia el estimador sería dividir la densidad de energía por la duración en que dicha energía se suministra (QT con T el periodo de muestreo)

$$P(\omega) = \frac{\left| \underline{S}^H \underline{X}_n \right|^2}{Q} = \frac{1}{Q} \underline{S}^H \left(\underline{X}_n \underline{X}_n^H \right) \underline{S} \quad \text{W./Hz}$$

$$P(w) = \frac{|\underline{S}^H \underline{X}_n|^2}{Q} = \frac{1}{Q} \underline{S}^H \left(\underline{X}_n \underline{X}_n^H \right) \underline{S}$$

Nótese que esta parte del periodograma sugiere el correspondiente estimador de la matriz de correlación

El valor esperado del Periodograma

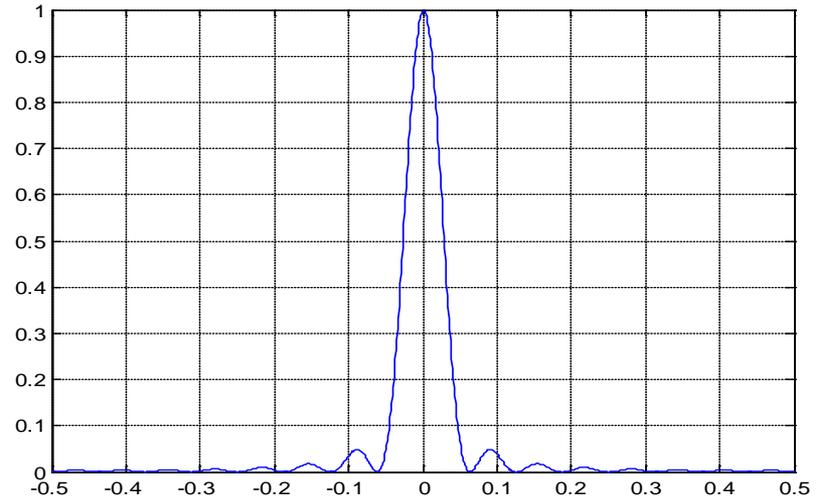
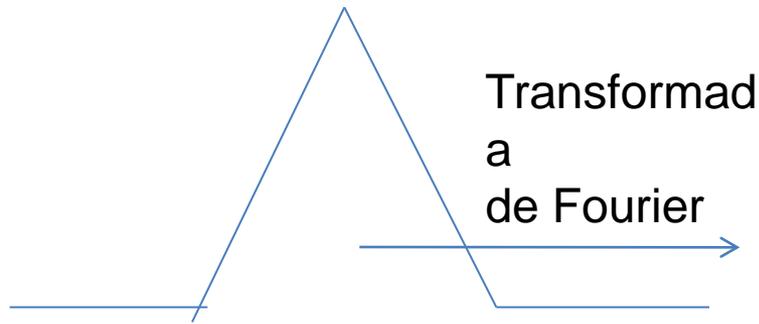
$$E[P(w)] = E \left[\frac{|\underline{S}^H \underline{X}_n|^2}{Q} \right] =$$

Obviamente, existe sesgo. El sesgo decrece a medida que pueda aumentarse la longitud de los datos Q

$$= \frac{1}{Q} \underline{S}^H E \left(\underline{X}_n \underline{X}_n^H \right) \underline{S} = \frac{\underline{S}^H \underline{R} \underline{S}}{Q}$$

Mas detalle sobre el sesgo del Periodograma se consigue al expresar el estimador de la función de correlación que se corresponde a la expresión anterior

$$P(w) = TF \left(\begin{array}{cc} \left(1 - \frac{|n|}{Q} \right) r(n) & \forall |n| \leq Q \\ 0 & resto \end{array} \right)$$

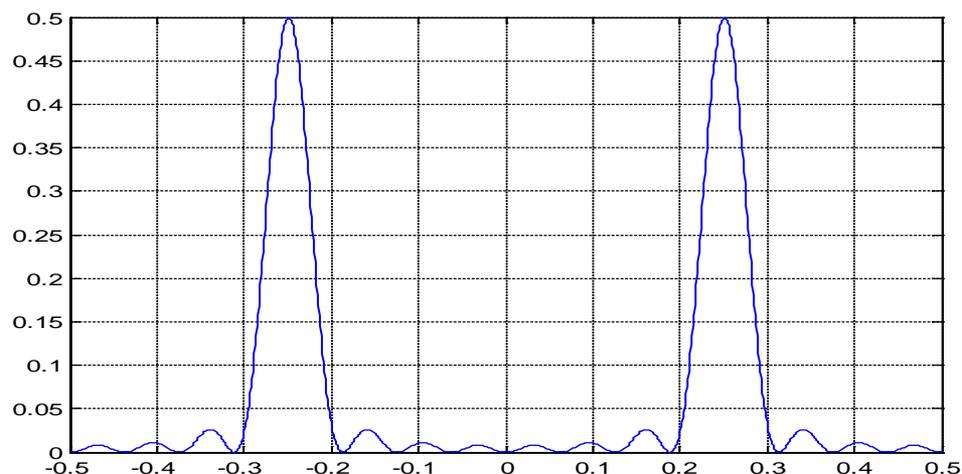


$$E(P(w)) = \frac{1}{2\pi} s(w) * \text{sinc}^2(w)$$

Es decir, el Periodograma siempre tiene sesgo, motivado por la longitud finita de la correlación.

En otras palabras, el valor esperado del periodograma es la convolución de la densidad espectral correcta por una función sinc al cuadrado.

El efecto puede verse en la siguiente grafica donde se pretende estimar la densidad espectral de una senoide, el numero de muestras disponibles es de 16 (es decir sufre el efecto de un triangulo de 32 muestras) su frecuencia central es de 0.25 (La densidad espectral correcta serian dos deltas de área 0.5 cada una lo que, al integrar ambas darían la potencia unidad que tiene la senoide) y el periodograma resultante es:



Donde puede verse que en lugar de dos deltas de área 0.5 a las frecuencias de ± 0.25 aparece la función sinc al cuadrado

El Sesgo del Periodograma: VENTANAS

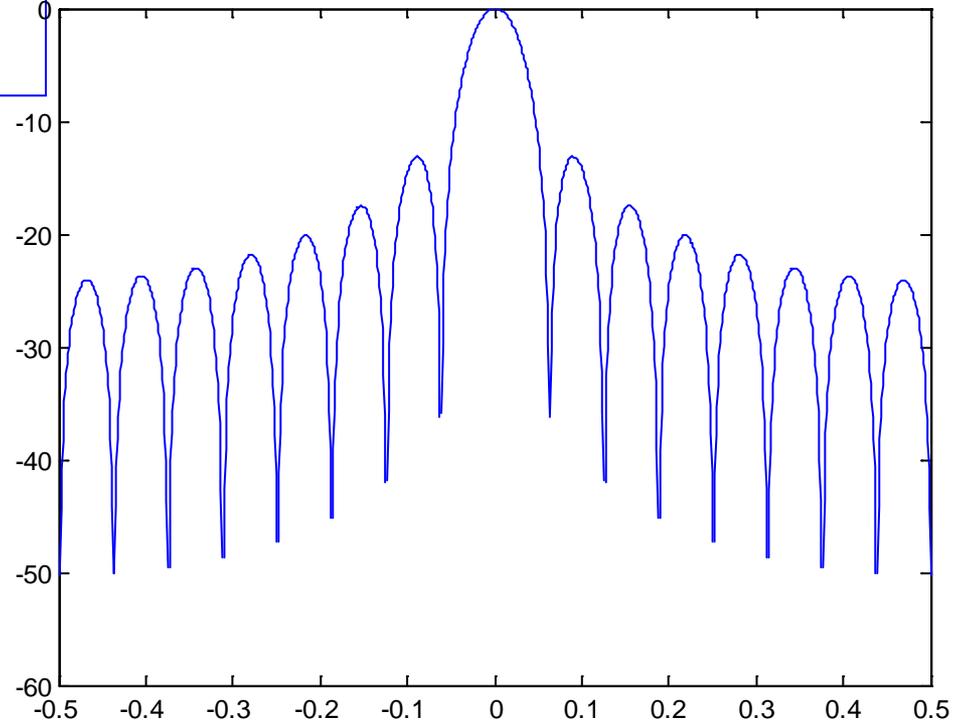
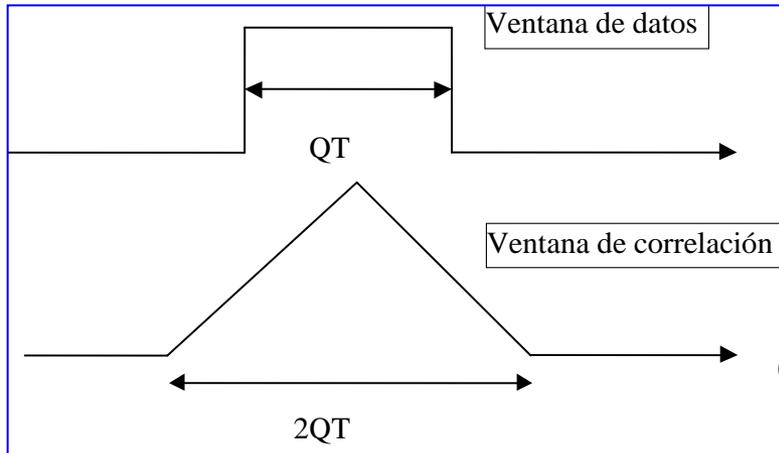
El sesgo del periodograma viene de que la observación de una longitud finita de los datos (estos son “vistos” a través de una ventana rectangular) da lugar a un filtrado del espectro con la sinc al cuadrado.

Visto de otra manera: Al enventanar la señal con un rectángulo, la correlación queda a su vez enventanada por la auto-correlación del rectángulo, un triángulo, que a la postre introduce el sesgo en la estimación.

Así pues, si se enventanan los datos con una función $w(n)$, la auto-correlación estimada queda enventanada por la auto-correlación de $w(n)$.

En el dominio de la frecuencia: Si la ventana de datos tiene como TF $W(f)$ entonces el espectro se convoluciona con el modulo de $W(f)$ al cuadrado.

Ejemplo: Ventana de datos rectangular.



Diseño de Ventanas

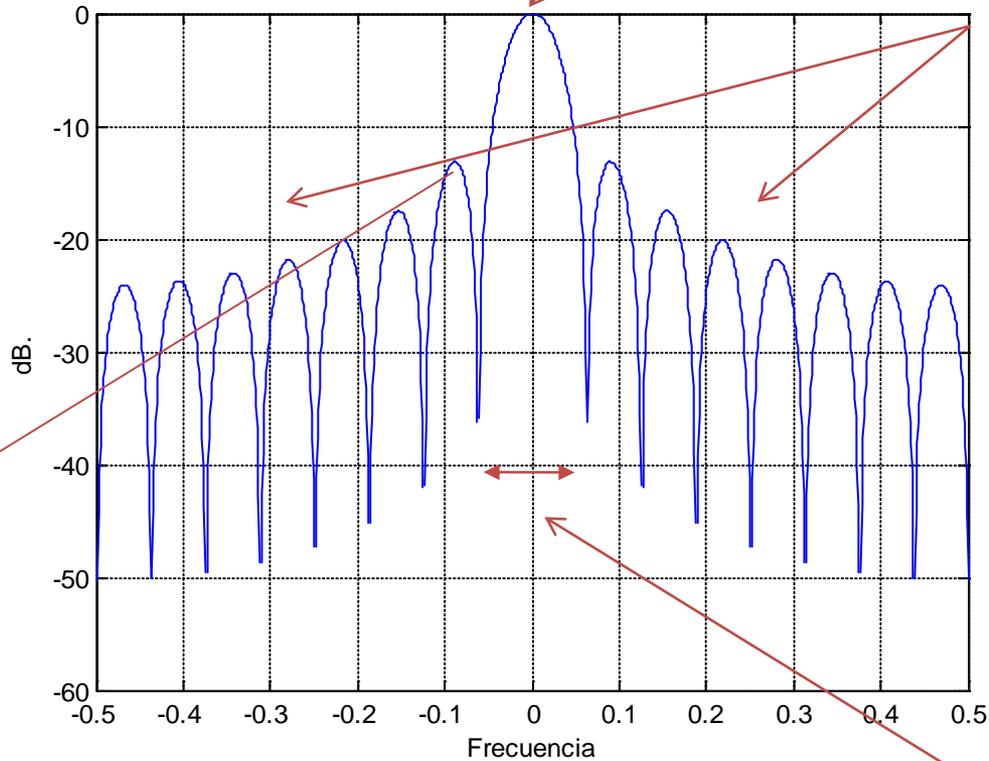
Las condiciones de una ventana de correlación serian:

- Que su TF sea siempre positiva (Se garantiza si se deriva como la auto correlación de una de datos)
- Que el máximo de su TF este en el origen (para no introducir sesgo en la posición). Basta con que sea siempre positiva a nivel temporal.
- Que sea su TF simétrica, de este modo el “leakage” de energía a un lado y a otro no se privilegia. Se garantiza al ser la versión temporal una auto correlación.
- Que el ancho del lóbulo principal de su TF sea lo mas pequeño posible
- Que el nivel de lóbulo lateral decrezca lo mas rápido posible.

Las dos ultimas cualidades son contradictorias como veremos. Ambas son una manera de manifestar el objetivo de que la transformada de la ventana de correlación se parezca lo mas posible a una delta.

Máximo en el origen (Sin sesgo al indicar una posición)

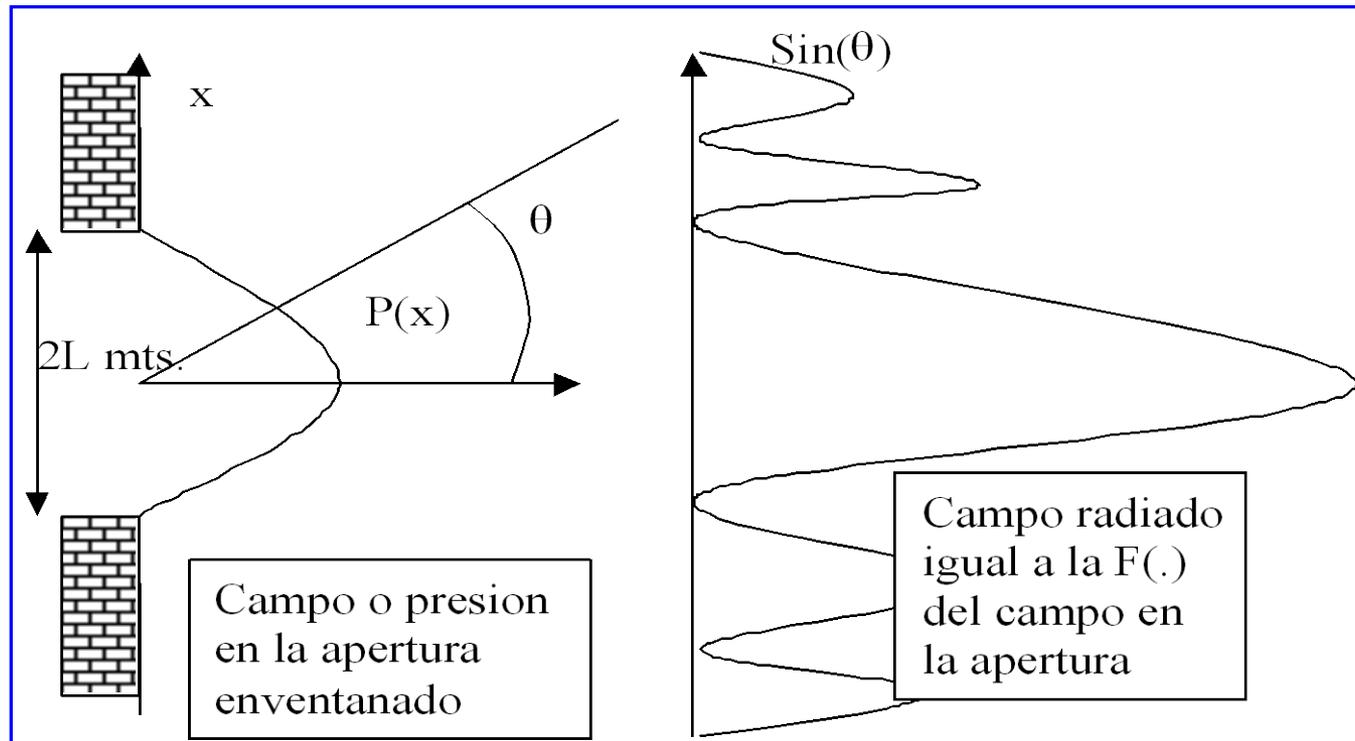
Simétrica, produciendo un "leakage" idéntico a ambos lados del máximo



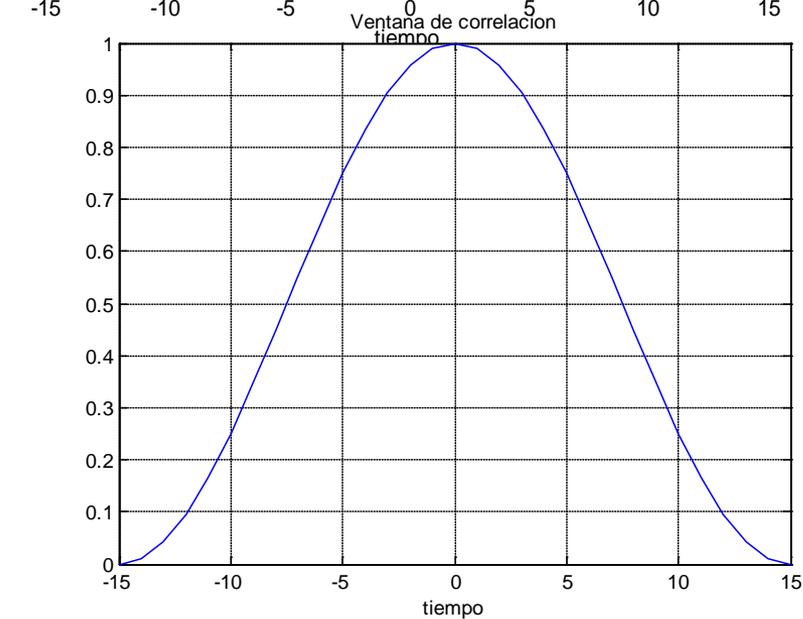
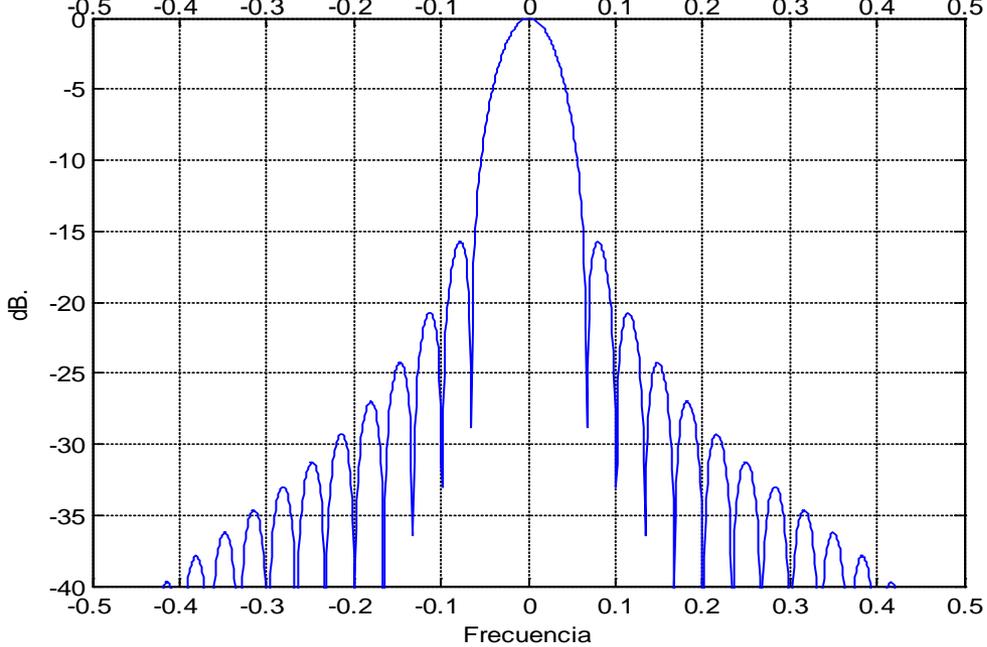
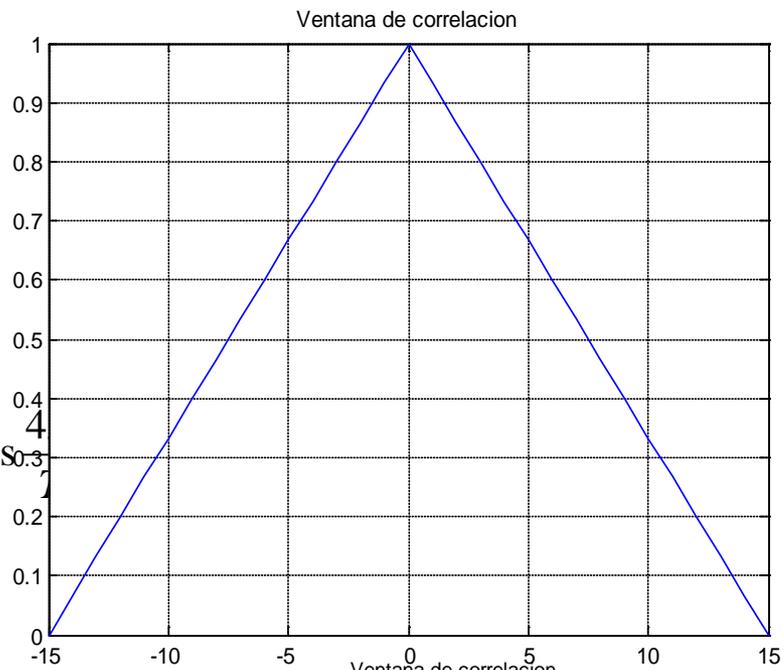
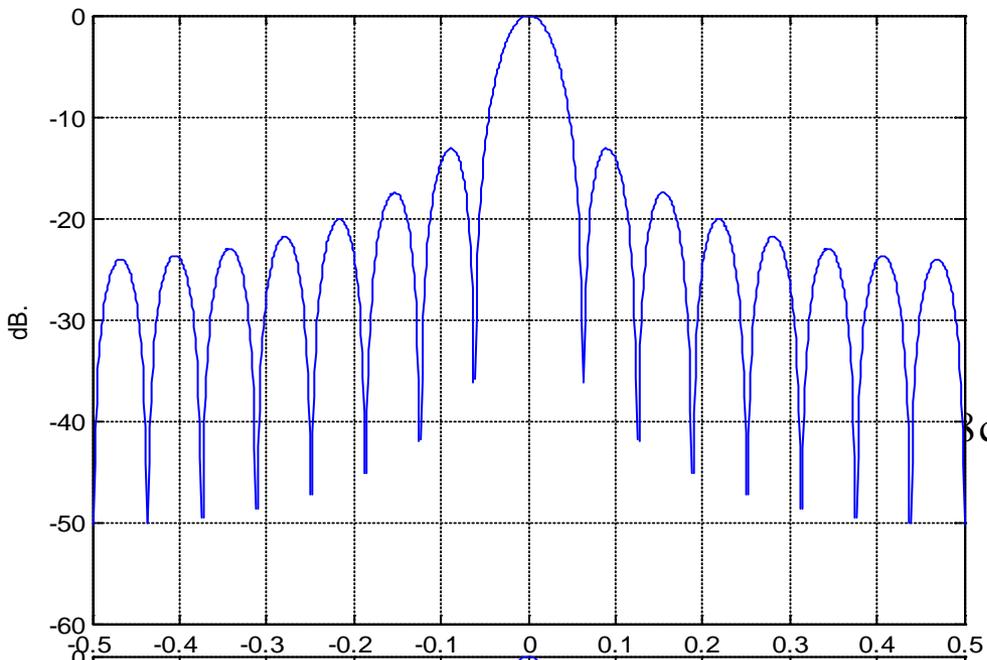
Máxima pendiente en dB/octava en lóbulos secundarios para evitar "falsos máximos"

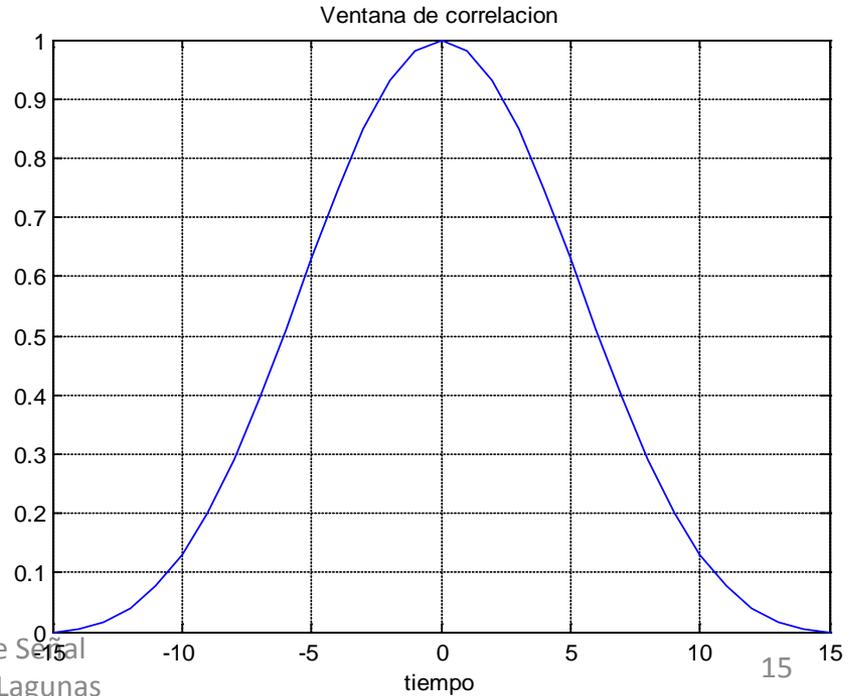
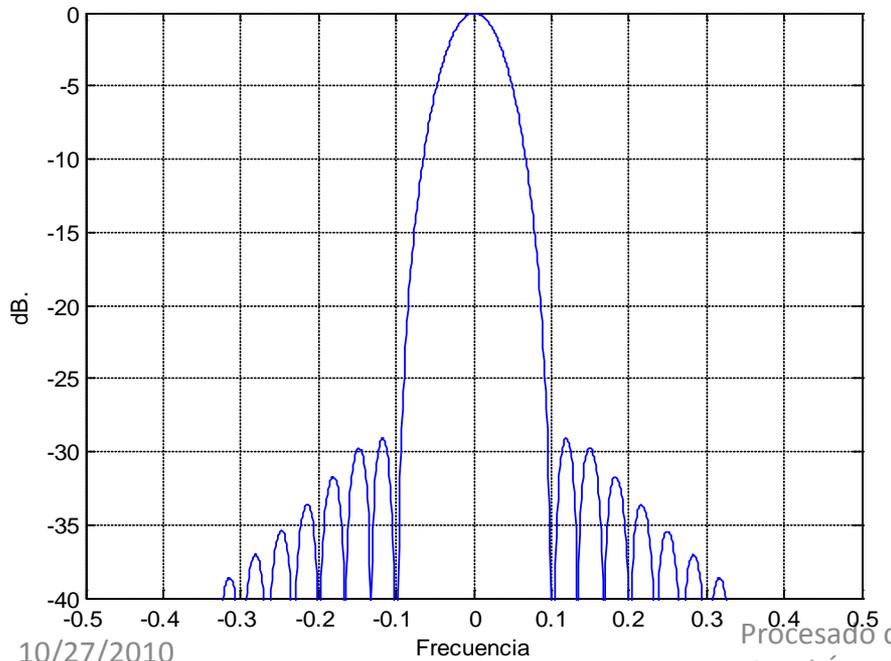
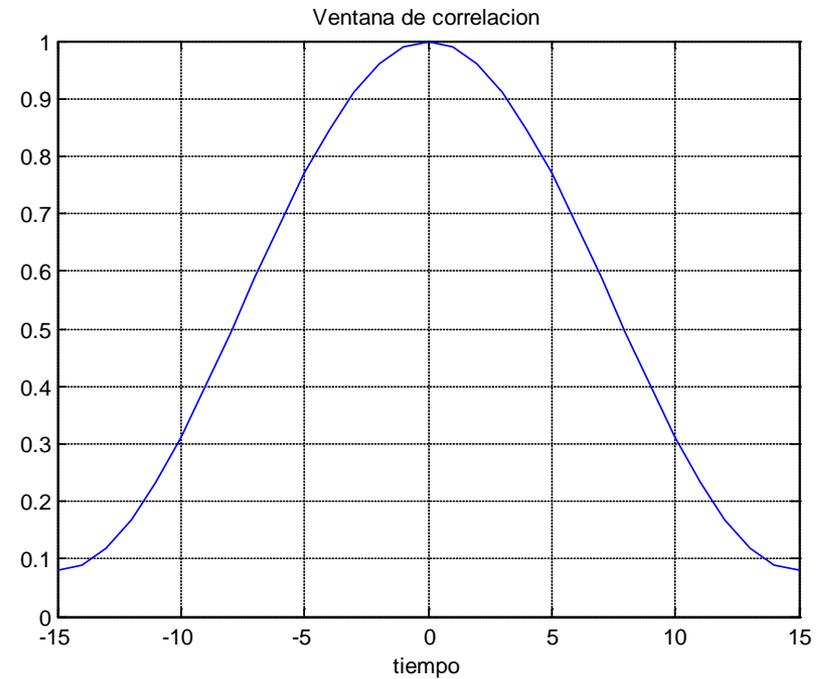
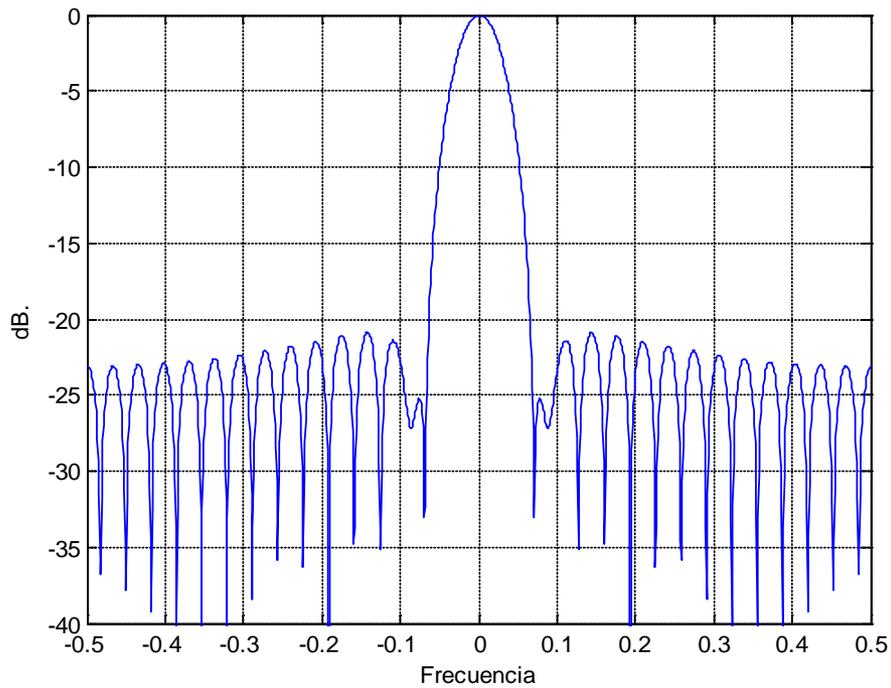
Ancho de lóbulo principal mínimo para máxima resolución

Radiación en Campo Lejano de una Apertura



Con esta aplicación es fácil entender los compromisos existentes en el diseño de ventanas. La **CONCLUSION** es: No existe una ventana optima y todas son un compromiso entre resolución y lóbulo lateral.





Diseño de Ventana de Mínimo Sesgo

El sesgo del Periodograma es igual a:

$$E\{P(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} W(\omega) * S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int W(\phi) S(\omega - \phi) d\phi$$

Desarrollando en serie de Taylor

$$s(\omega - \phi) \approx s(\omega) - \phi s'(\omega) + \frac{\phi^2}{2} s''(\omega) - \frac{\phi^3}{6} s'''(\omega)$$

Al sustituir en la expresión del sesgo y despreciando la derivada cuarta del espectro correcto se tiene:

$$E\{P(\omega)\} \approx s(\omega) \frac{1}{2\pi} \int W(\phi) d\phi + \frac{s''(\omega)}{2} \frac{1}{2\pi} \int \phi^2 W(\phi) d\phi$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} w_d^2(t) dt = 1$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left| \frac{\partial w_d}{\partial t} \right|^2 dt \Big|_{min}$$

Con lo que el Lagrangiano queda:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left[\left| \frac{\partial w_d}{\partial t} \right|^2 - \lambda (w_d^2(t) - 1) \right] dt$$

Y la ecuación que define la ventana optima seria:

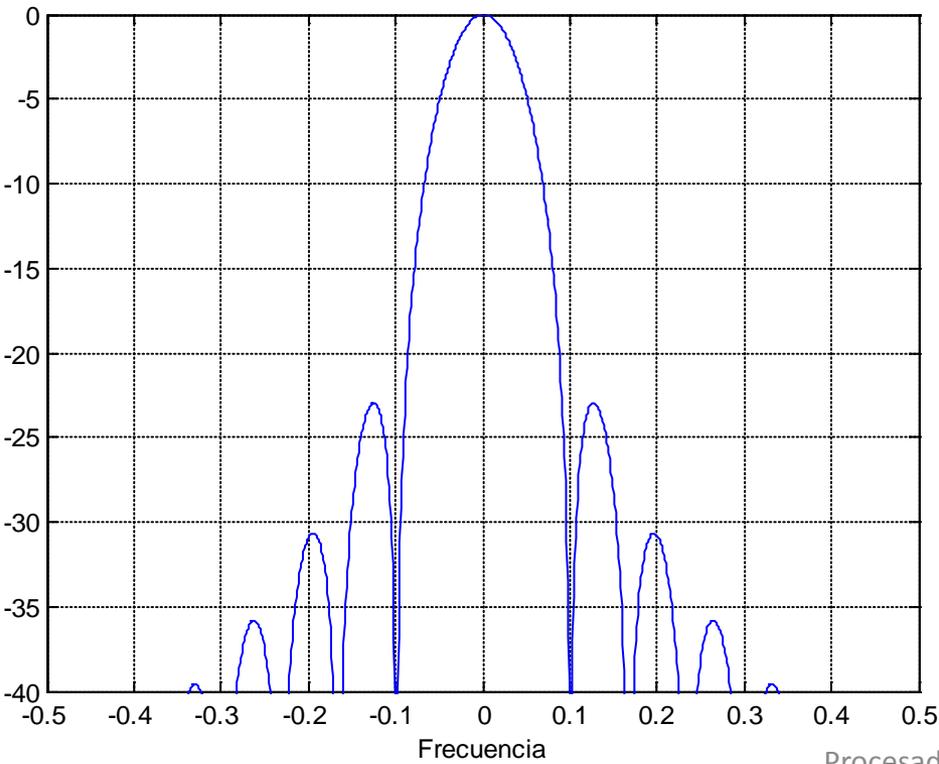
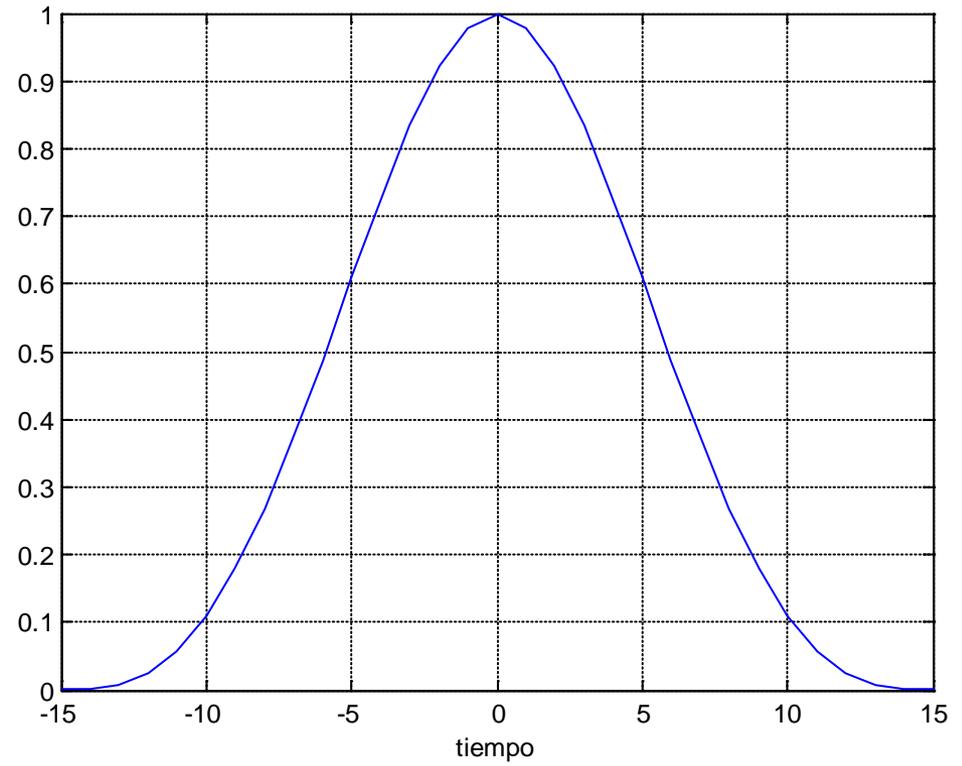
$$\frac{\partial}{\partial w_d'} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left| \frac{\partial w_d}{\partial t} \right|^2 - \lambda w_d^2(t) \right] = 0$$

Y la solución para la ventana de datos y la de correlación seria:

$$w_d(t) = \begin{cases} \frac{2}{T} \cos \frac{\pi t}{T} & \forall |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$
$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left| \text{sen} \frac{\pi t}{T} \right| + \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \cos \frac{\pi t}{T} & \forall |t| \leq T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

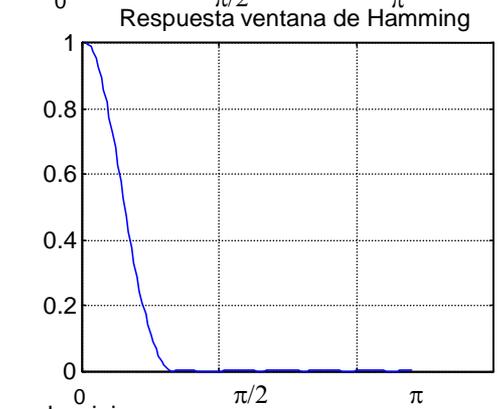
Ventana de correlación de mínimo sesgo y respuesta frecuencial

Ventana de correlación



RESUMEN

Ventanas mas usadas
para análisis espectral



La Varianza del Periodograma

Sin pérdida de generalidad, se tomara el caso de ruido blanco. Nótese que este es el caso donde el periodograma no presenta sesgo y el calculo de la varianza es mas sencillo.

$$P(\omega) = \frac{1}{Q} |DFT(w(n)x(n))|^2 \quad E\{P(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int N_o |W(\phi)|^2 d\phi = N_o = S(\omega)$$

La covarianza cruzada (para dos frecuencias diferentes) se formula como::

$$E\{P(\omega_1)P^*(\omega_2)\} = \frac{1}{Q^2} \sum_{r,s,p,q} E\{x(r)x(s)x(p)x(q)\} w(r)w(s)w(p)w(q)$$

$$\exp\left[j(\omega_1(s-r) + \omega_2(q-p))\right]$$

Que, para el caso de ruido blanco gaussiano, permite usar que:

$$\begin{aligned} E\{x(r)x(s)x(p)x(q)\} &= r(r-s)r(p-q) + r(r-p)r(q-s) + r(r-q)r(p-s) = \\ &= N_o^2 [\delta(r-s)\delta(p-q) + \delta(r-p)\delta(q-s) + \delta(r-q)\delta(p-s)] \end{aligned}$$

En definitiva:

$$\begin{aligned} E\{P(\omega_1), P(\omega_2)\} &= \\ &= \frac{N_o^2}{Q^2} \left\{ Q^2 + \sum_{p,q=0}^{Q-1} w^2(p)w^2(q) \exp[j(p-q)(\omega_1 + \omega_2)] + \sum_{p,q=0}^{Q-1} w^2(p)w^2(q) \exp[j(q-p)(\omega_1 - \omega_2)] \right\} = \\ &= N_o^2 \left\{ 1 + |W(\omega_1 - \omega_2)|^2 + |W(\omega_1 + \omega_2)|^2 \right\} \end{aligned}$$

La covarianza depende de la ventana de datos utilizada

En el caso de usar ventana rectangular

$$\begin{aligned} \text{cov}\{P(\omega_1), P(\omega_2)\} &= E\{P(\omega_1), P(\omega_2)\} - E\{P(\omega_1)\}E\{P(\omega_2)\} = \\ &= N_o^2 \left\{ \frac{\text{sen}^2 [Q(\omega_1 - \omega_2) / 2]}{Q^2 \text{sen}^2 [(\omega_1 - \omega_2) / 2]} + \frac{\text{sen}^2 [Q(\omega_1 + \omega_2) / 2]}{Q^2 \text{sen}^2 [(\omega_1 + \omega_2) / 2]} \right\} \end{aligned}$$

Esta expresión revela que para frecuencias diferentes, la covarianza cruzada es cero, es decir, cada raya espectral es una v.a. independiente de las demás

Cuando la frecuencia es la misma, la covarianza se reduce a:

$$\text{var}\{P(\omega)\} = N_o^2 \left[1 + \frac{\text{sen}^2(Q\omega)}{Q^2 \text{sen}^2(\omega)} \right]$$

Nótese que aunque Q tienda a infinito la varianza es exactamente del orden del espectro a estimar !!!!!

ES NECESARIO promediar periodogramas para reducir varianza

Además la expresión revela que el estimador es de la forma el valor exacto mas un error proporcional al valor exacto

$$P(\omega) = S(\omega)(1 \pm \varepsilon)$$

Por esta razón es obligado presentar el espectro estimado en escala logarítmica

$$P(\omega)(dB) = S(\omega)(dB) + 10\log(1 \pm \varepsilon) \cong S(\omega)(dB) \pm \varepsilon(dB)$$

El método WOSA (Welch)

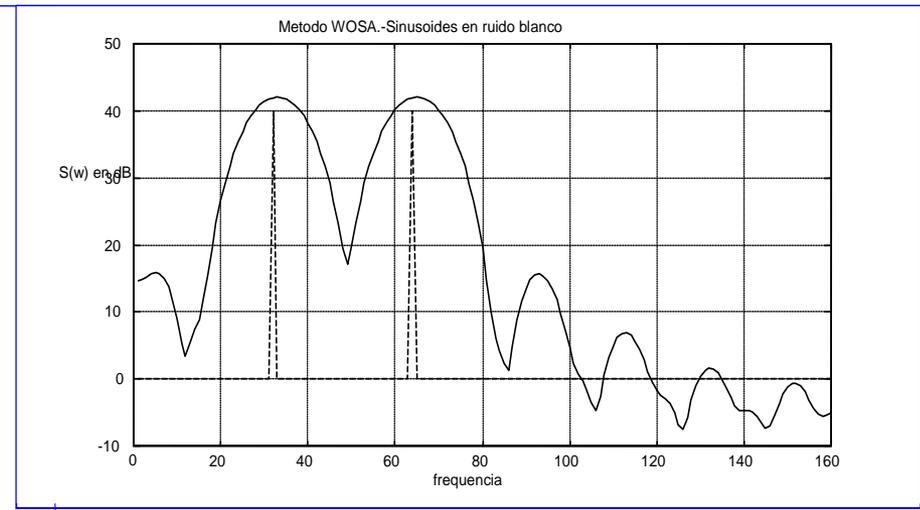
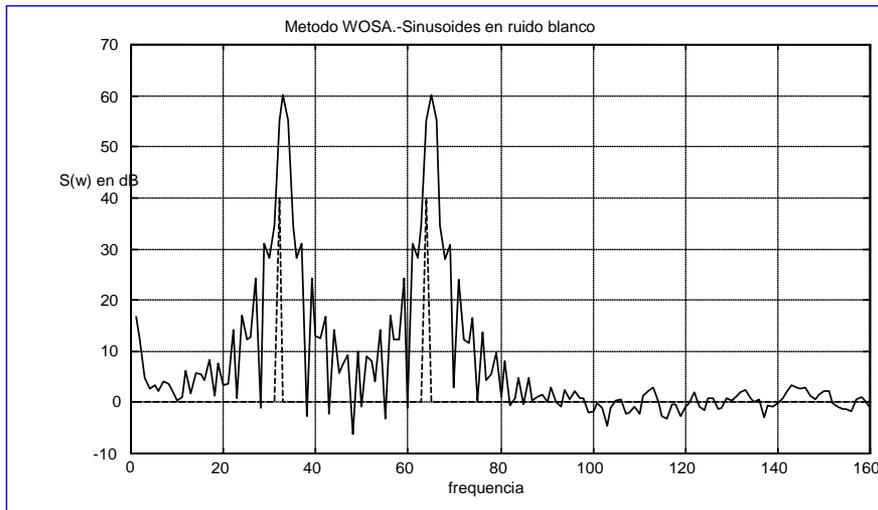
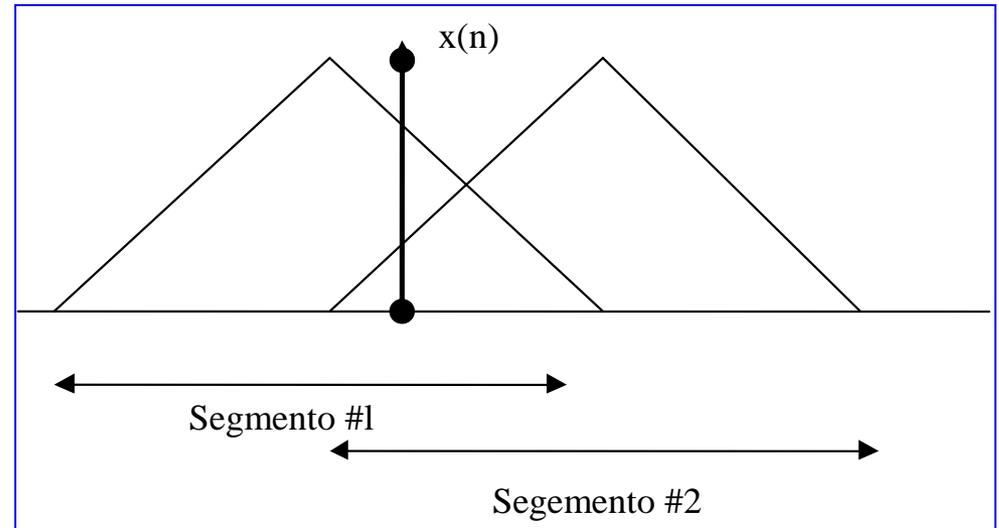
Así pes, para cada segmento se toma la DFT de Q datos, enventanados con una ventana de datos para controlar el sesgo,

$$P(\omega) = \left| \sum_{q=0}^{Q-1} w_d(q)x(q) \exp(jq\omega) \right|^2 / Q = \frac{|DFT(\underline{w} \otimes \underline{X}_n)|^2}{Q}$$

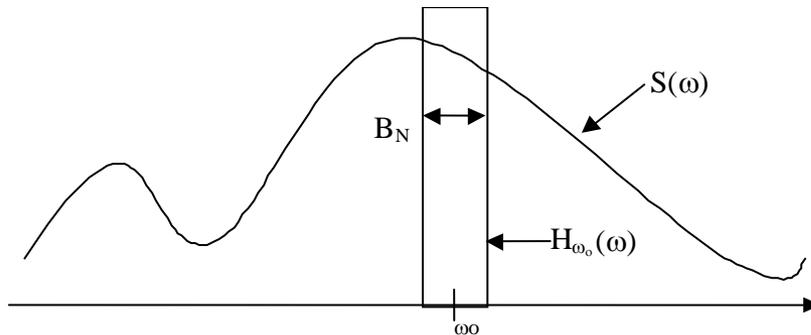
A continuación, se promedian los periodogramas para todos los segmentos disponibles dando lugar al estimador que Welch denominó WOSA (Weighting Overlapping Spectrum Averaging)

$$S_{WOSA}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{|DFT(\underline{w} \otimes \underline{X}_n)|^2}{Q}$$

Nótese que para reducir varianza han de sumarse M segmentos independientes. Como los segmentos están enventanados, estos pueden solaparse. Este proceso se indica en la figura siguiente para una ventana triangular. Nótese que al solapar los segmentos al 50% cada muestra interviene en el estimador con el mismo peso.



BANCO DE FILTROS EN ANALISIS ESPECTRAL



La idea es medir la potencia a la salida de un filtro paso banda utilizando que el espectro de la salida es el de la entrada por el modulo de la función de transferencia al cuadrado

Las ecuaciones son:

$$y_{w_o}(n) = \sum_{q=0}^{Q-1} h_{w_o}(q)x(n-q) = \underline{h}_{w_o}^H \underline{X}_n$$

$$S_y^{w_o}(\omega) = |H_{w_o}(\omega)|^2 S(\omega)$$

$$P(\omega_o) = \int_{B_N} |H_{\omega_o}(\omega)|^2 S(\omega) d\omega \approx |H_{\omega_o}(\omega_o)|^2 B_N S(\omega_o)$$

Se asume que el espectro de entrada es prácticamente plano dentro del ancho de banda

La potencia a la salida del filtro es el valor esperado del modulo de la salida.

$$P(\omega_o) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{h}_{\omega_o}^H \underline{X}_n \underline{X}_n^H \underline{h}_{\omega_o} = \underline{h}_{\omega_o}^H \underline{\underline{R}} \underline{h}_{\omega_o}$$

El estimador de la densidad espectral seria según sigue:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{P(\omega)}{B_N} = \frac{\underline{h}_{\omega}^H \underline{\underline{R}} \underline{h}_{\omega}}{B_N} = \frac{1}{N} \frac{1}{B_N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{h}_{\omega}^H \underline{X}_n \right|^2$$

La similitud con WOSA de la ultima expresión es total

Resta pues elegir el diseño del filtro para completar la estimación. Las opciones serian:

- Un solo filtro modulado en frecuencia (Filtro Base)
- Un filtro dedicado a cada frecuencia

El Ancho de Banda a usar

Asumiendo que el filtro usado es un FIR y que el máximo de su respuesta esta en el origen (o en la frecuencia en la que se desea estimar el espectro).

El criterio de diseño del ancho de banda seria que B_N sea tal que la potencia de ruido a la salida del filtro cuando se le aplica ruido blanco sea idéntico al de un filtro ideal de igual máximo y ancho de banda B_N

$$|H(0)|^2 B_N = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \underline{h}^H \underline{h}$$

$$B_N = \underline{h}^H \underline{h}$$

Con esta opción queda completada la construcción del estimador. Esta opción también puede interpretarse como la que “calibra” el estimador con ruido blanco.

$$S(\omega) = \frac{P(\omega)}{B_N} = \frac{\underline{h}_\omega^H \underline{R} \underline{h}_\omega}{\underline{h}_\omega^H \underline{h}_\omega} = \frac{1}{N} \frac{1}{\underline{h}_\omega^H \underline{h}_\omega} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{h}_\omega^H \underline{X}_n \right|^2$$

Veamos el caso de un filtro fijo que se modula en frecuencia para realizar la exploración. El filtro prototipo (paso bajo) se elige el mas sencillo, es decir, un integrador.

$$\underline{h}^T = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \quad \leftarrow \text{Filtro básico}$$

$$\underline{h}^T \underline{h} = Q \quad \leftarrow \text{Ancho de banda al ruido}$$

$$\underline{h}_\omega^T = [1 \quad \exp(j\omega) \quad \dots \quad \exp(j(Q-1)\omega)] = \underline{S}^T \quad \leftarrow \text{Filtro modulado}$$

Nótese que el método que resulta es idéntico a WOSA

$$S(\omega) = \frac{P(\omega)}{B_N} = \frac{\underline{S}^H \underline{R} \underline{S}}{\underline{S}^H \underline{S}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\left| \underline{S}^H \underline{X}_n \right|^2}{Q}$$

METODO DE MINIMA VARIANZA (MLM)

Se trata de diseñar el filtro para cada frecuencia. La primera condición es que no introduzca sesgo cuando mide a una frecuencia ω . Esto significa que la respuesta a esa frecuencia ha de ser 0 dB (la unidad).

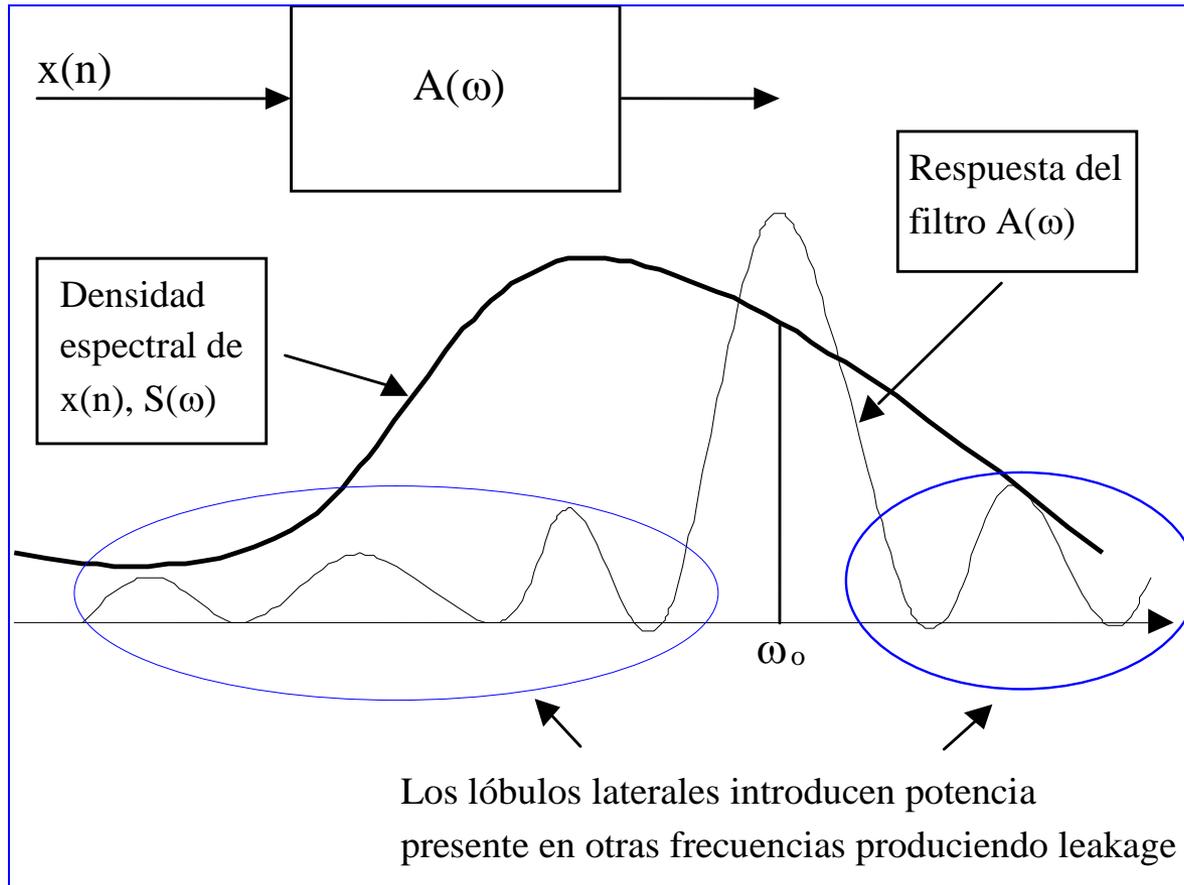
$$\underline{a}^H \underline{S} = 1$$

$$\underline{S}^T = [1 \quad \exp(j\omega_o) \quad \cdots \quad \exp(j(Q-1)\omega_o)]$$

En segundo lugar, sería bueno que fuera de esa frecuencia minimizase la energía que puede atravesar el filtro. A esta condición se la denomina minimizar el “leakage” del filtro a diseñar.

Dado que a la frecuencia central la respuesta ya se ha fijado en la restricción, basta pues con exigirle mínima potencia de salida.

$$\underline{a} = \arg \min_{\underline{a}} \left(\underline{a}^H \underline{\underline{R}} \underline{a} \right) \leftrightarrow \textit{minimo leakage}$$



$$E\left\{|y(n)|^2\right\} = E\left\{\underline{a}^H \underline{X}_n \underline{X}_n^H \underline{a}\right\} \quad P(\omega_0) = P_y = \underline{a}^H \underline{\underline{R}} \underline{a}$$

$$S(\omega_0) = \frac{P_y}{B_N} = \frac{\underline{a}^H \underline{\underline{R}} \underline{a}}{\underline{a}^H \underline{a}}$$

Las ecuaciones de diseño son:

$$\underline{a}^H \underline{S} = 1$$

$$\underline{a}^H \underline{R} \underline{a} \Big|_{min}$$

El filtro optimo es:

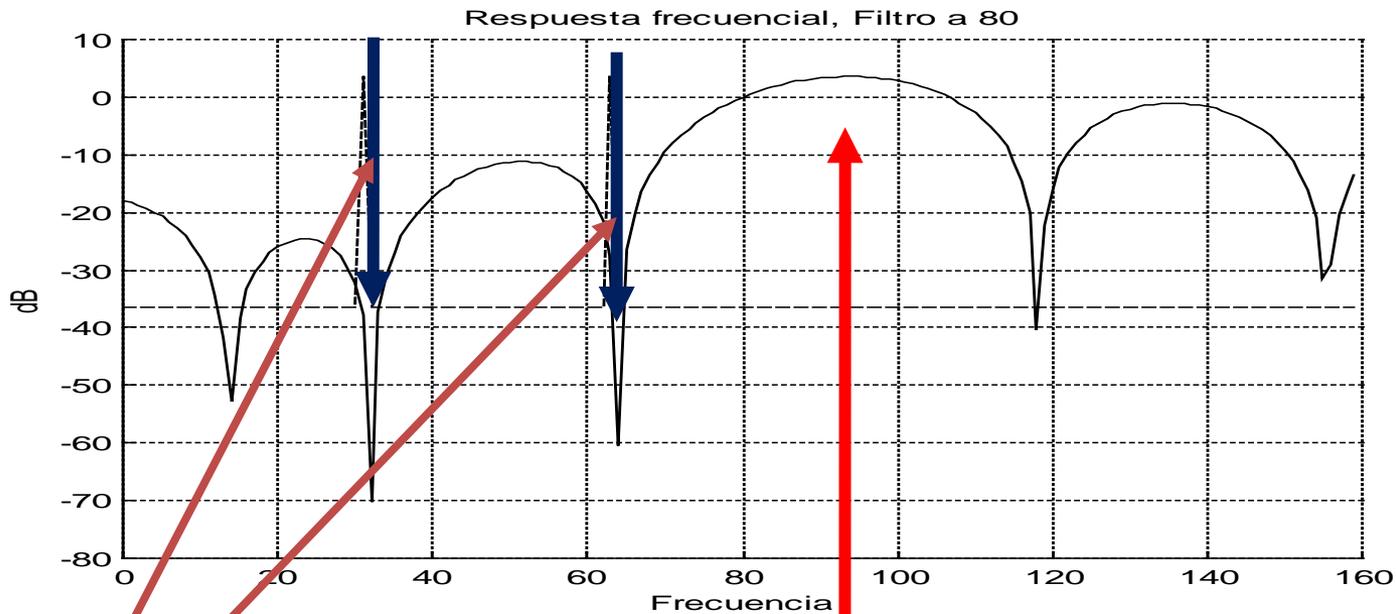
$$\underline{a} = \frac{\underline{R}^{-1} \underline{S}}{\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S}}$$

Al sustituir el filtro en la expresión de la potencia a la salida se obtiene.

$$P(\omega_o) = \underline{a}^H \underline{R} \underline{a} = \frac{1}{\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S}}$$

Finalmente, calculando el ancho de banda y dividiendo se obtiene el estimador espectral

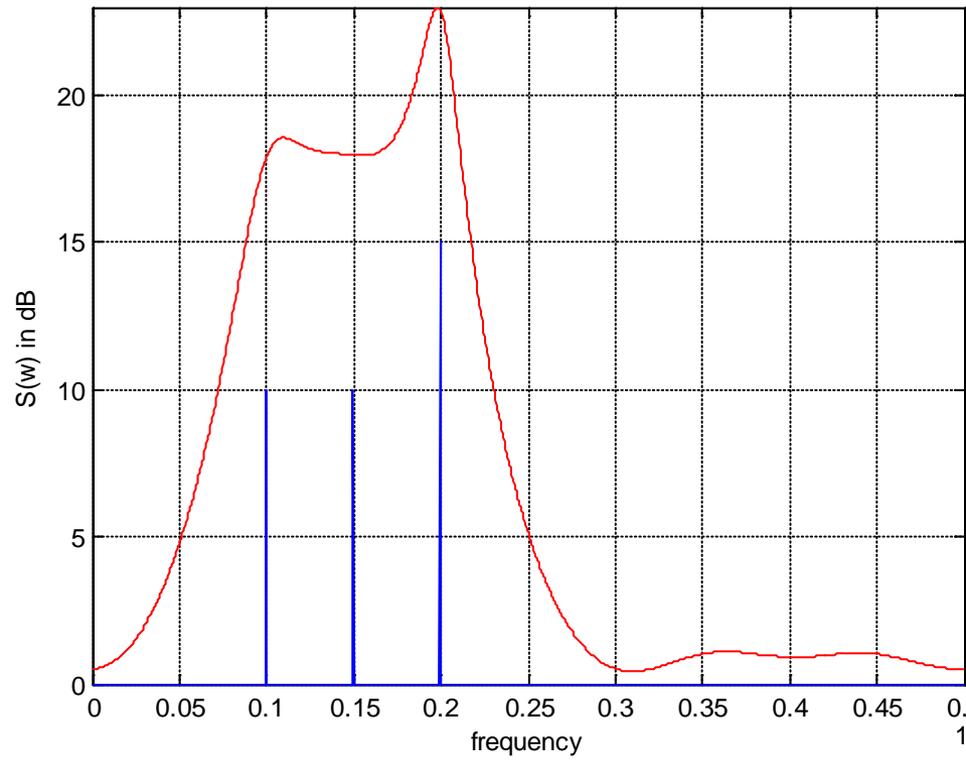
$$S(\omega_o) = \frac{\underline{a}^H \underline{R} \underline{a}}{\underline{a}^H \underline{a}} = \frac{\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S}}{\underline{S}^H \underline{R}^{-2} \underline{S}}$$



Líneas espectrales que el filtro anula para impedir que energía de frecuencias diferentes a la central distorsionen la medida de potencia

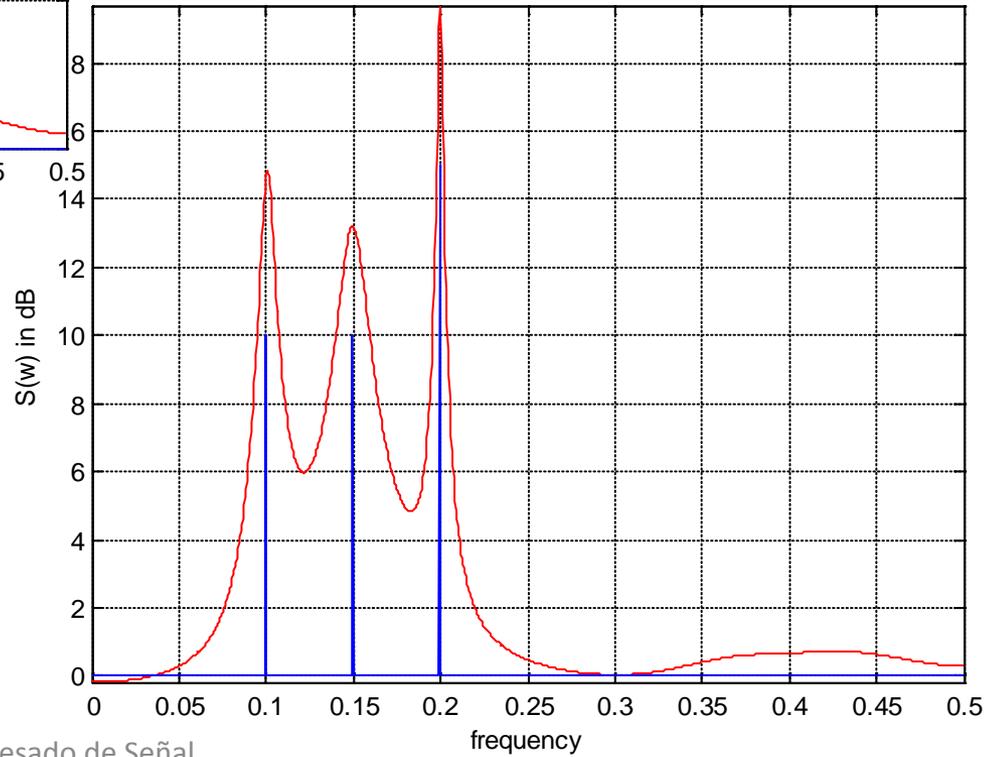
Frecuencia a la que está centrado el filtro

MLM Capon.-Sinusoides en ruido



MATLAB 7.0.4

NMLM Normalised.-Sinusoides en ruido



El error de ML (Method)

$$\underline{X}_n = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-Q+1) \end{bmatrix} = \alpha \exp(jn\omega_o) \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-j\omega_o) \\ \vdots \\ \exp(-j(Q-1)\omega_o) \end{bmatrix} + \underline{\phi}_n$$

La estimación de la amplitud de una portadora ya fue resuelto en estimación

$$E\{\underline{X}_n\} = \alpha \exp(jn\omega_o) \underline{S}$$

$$\text{cov}\{\underline{X}_n\} = \underline{R}_0$$

La log-likelihood era:

$$-\Lambda(\alpha, \underline{S}) = \left(\underline{X}^H - \alpha^* \underline{S}^H \right) \underline{R}_0^{-1} \left(\underline{X} - \alpha \underline{S} \right)$$

La estimación ML de la amplitud era según sigue:

$$\hat{\alpha} = \frac{\underline{S}^H \underline{R}_0^{-1} \underline{X}_n}{\underline{S}^H \underline{R}_0^{-1} \underline{S}} = \underline{b}^H \underline{X}_n$$

La expresión es similar al empleado en Capon, de hecho la potencia es bastante similar, pero diferentes. Así pues, ¿No es un método de máxima verosimilitud?

$$ML \quad \frac{1}{\underline{S}^H \underline{R}_0^{-1} \underline{S}}$$

$$MLM (Capon) \quad \frac{1}{\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S}}$$

El método de mínima varianza MV **únicamente** es de máxima verosimilitud MLM **cuando** se trata de una sola línea espectral en ruido blanco **y tan solo** cuando el filtro explora la frecuencia de la línea espectral



$$\underline{R} = |\alpha|^2 \underline{S} \underline{S}^H + \underline{R}_n$$

$$\underline{R}^{-1} = \underline{R}_n^{-1} - \frac{|\alpha|^2 \underline{R}_n^{-1} \underline{S} \underline{S}^H \underline{R}_n^{-1}}{1 + |\alpha|^2 \underline{S}^H \underline{R}_n^{-1} \underline{S}}$$

$$\underline{RS} = \left(\frac{1}{1 + |\alpha|^2 \underline{S}^H \underline{R}_n^{-1} \underline{S}} \right) \underline{R}_n^{-1} \underline{S}$$

MLM y Periodograma

Coinciden solo cuando el proceso a estimar es ruido blanco (?)

$$\underline{A} = \frac{\underline{S}}{\underline{S}^H \underline{S}} = \frac{\underline{S}}{Q}$$

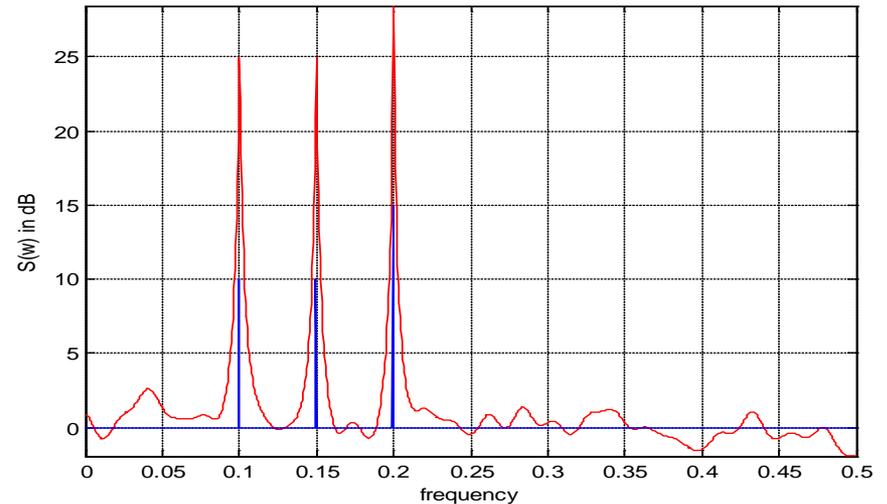
$$B_N = \underline{A}^H \underline{A} = \frac{1}{Q}$$

$$P(\omega_o) = \frac{1}{Q^2} \underline{S}^H \underline{X}_n \underline{X}_n^H \underline{S}$$

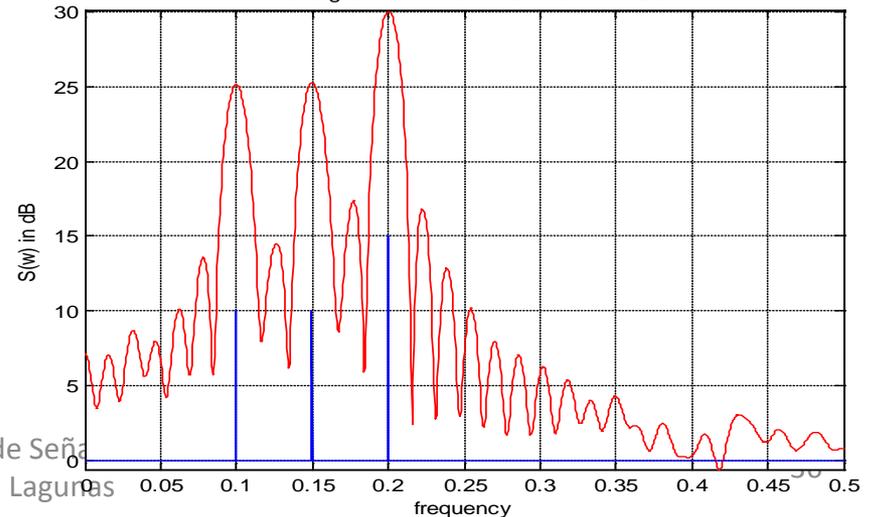
$$S(\omega_o) = \frac{1}{Q} \underline{S}^H \underline{X}_n \underline{X}_n^H \underline{S} \equiv \text{Periodograma}$$

Difiere mucho en lo que a calidad se refiere. A la derecha ambos estimadores para el mismo orden (64)

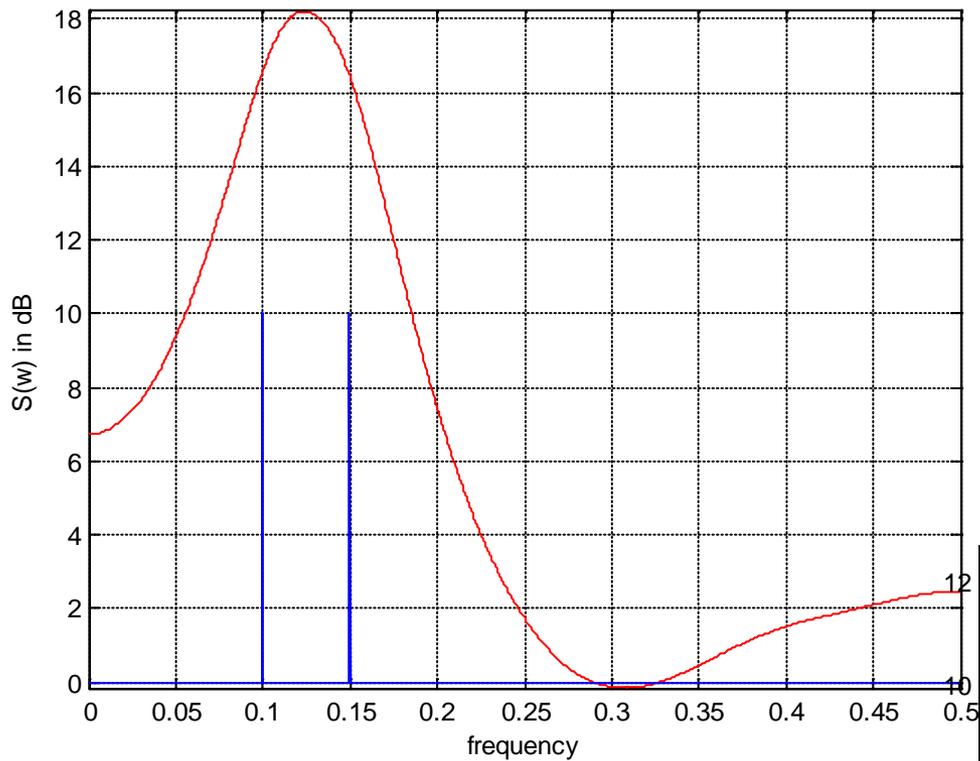
MLM Capon.-Sinusoides en ruido



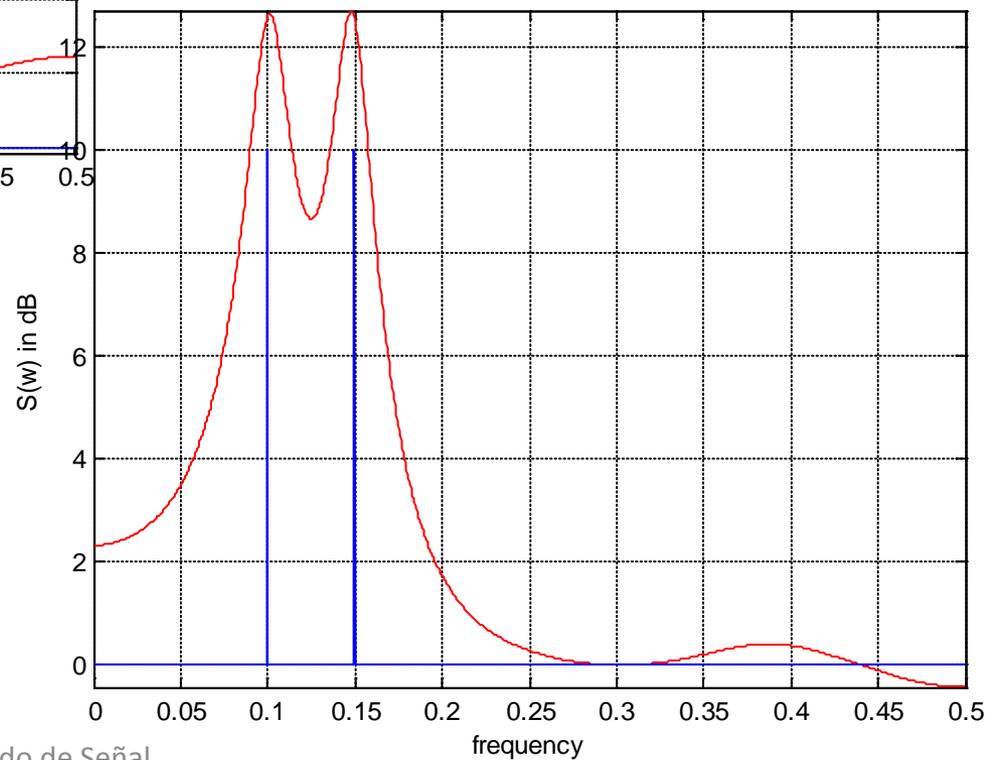
Periodogram Method.-Sinusoides en ruido



MLM Capon.-Sinusoides en ruido



NMLM Normalised.-Sinusoides en ruido



Estimación Espectral Paramétrica

Básicamente se refiere a cambiar el problema de la estimación del espectro por un conjunto de parámetros. En concreto, usa modelos racionales que asimila al proceso observado y, una vez estimado el modelo obtiene el espectro.

El formalismo de la estimación espectral paramétrica es claro cuando el problema se plantea como la estimación del espectro **COHERENTE CON LOS DATOS**. Los datos se refieren a los valores de auto correlación disponibles o estimados con mayor calidad de las muestras de la señal bajo análisis.

Una vez fijadas las restricciones, se añade al estimador una cualidad (**COSMETICA**) que fija las características del estimador. La formulación resultante hace que se les denomine también métodos variacionales

Formulación Variacional del problema

El objetivo a maximizar/minimizar establece como “nos gusta” el espectro. Su formulación es de la forma:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi \left[\hat{S}(\omega) \right] d\omega \Bigg|_{\max}$$

Con respecto a las restricciones, se le impone que su acf tiene que ser, en los retardos o lags deseados idéntica a la obtenida de los datos. Nótese que básicamente los datos se resumen en el estimador WOSA. Por esta razón, básicamente se le pide al estimador que su transformada inversa coincida para un conjunto de valores dado (Numero de parámetros a estimar) con la transformada inversa del periodograma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi \left(\hat{S}(w) \right) \cdot \exp(-j2\pi qw) \cdot dw = \varphi(q) =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi \left(P(w) \right) \cdot \exp(-j2\pi qw) \cdot dw \quad q = -Q, \dots, Q$$

En general esta sería la formulación para un estimador espectral paramétrico

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi \left[\hat{S}(\omega) \right] d\omega \Big|_{\max}$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi \left[\hat{S}(\omega) \right] \exp(jq\omega) d\omega = \varphi(q) \quad q = -Q, \dots, Q$$

Después de formar el Lagrangiano, con los $2Q+1$ multiplicadores, la solución para el estimador es:

$$\frac{\partial \Phi(\hat{S})}{\partial \hat{S}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{S}} \sum_{q=-Q}^Q \lambda(q) \exp(jq\omega) = 0$$

Veamos a continuación los mas comunes (ya conocidos) bajo esta perspectiva.

El Periodograma dentro de los métodos variacionales

Sea $P(\omega)$ el estimador resultante de los datos.

Sea $r(q)$ $q=-Q, Q$ la estimación de auto correlación obtenido por TF inversa de $P(\omega)$

Del estimador se requiere que el área de su cuadrado sea máxima
Las restricciones son que su transformada inversa entre $-Q, Q$ sea la disponible

Nótese que en formulación variacional este caso se reduce a:

Al resolver la ecuación de la transparencia anterior se obtiene:

$$\Phi(x) = |x|^2 \text{ y } \Psi(x) = x$$

$$S(\omega) = \sum_{q=-Q}^Q \lambda(q) \exp(jq\omega)$$

Es decir, un estimador cuya área al cuadrado es máxima sujeto a restricciones de correlación equivale al diseño de un modelo MA(Q) del proceso bajo análisis.

Una medida de calidad mas intuitiva que la anterior es la siguiente: El área de un estimador es la potencia del proceso y esta siempre esta restringida por el valor obtenido de los datos ($r(0)$). Es decir la media aritmética del estimador esta dada.

Dada la media aritmética, la media geométrica, i.e. la aritmética del logaritmo, es máxima cuanto mas suave (“plano”) es el estimador.

En resume un estimador de máxima media geométrica con restricciones de correlación seria el estimador de máxima planicidad coherente con los datos.

Por su similitud con termodinámica J.P.Burg le denomino Método de Máxima Entropía o MEM

METODO DE MAXIMA ENTROPIA (MEM)

Así pues el objetivo es:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Ln}(S(\omega)) d\omega$$

Y las
restricciones de
correlación son:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) e^{jq\omega} d\omega = r_x(q) \quad \forall |q| \leq Q$$

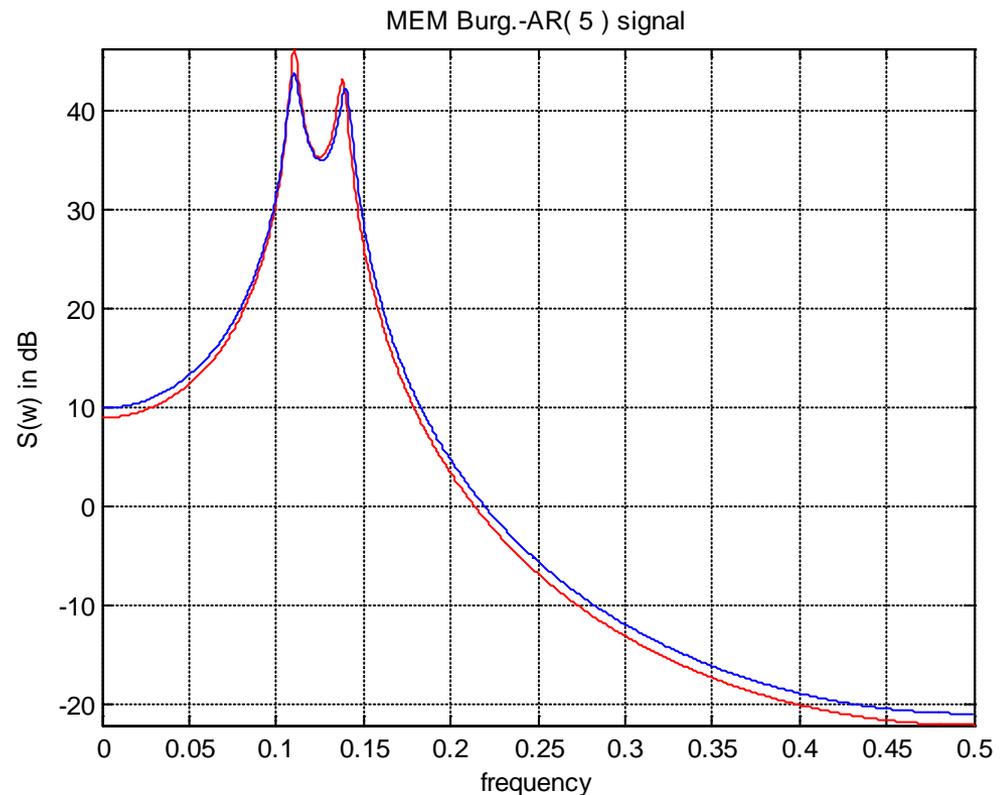
La solución es:

$$\frac{1}{S(\omega)} - \sum_{q=-Q}^Q \lambda(q) \exp(jq\omega) = 0$$

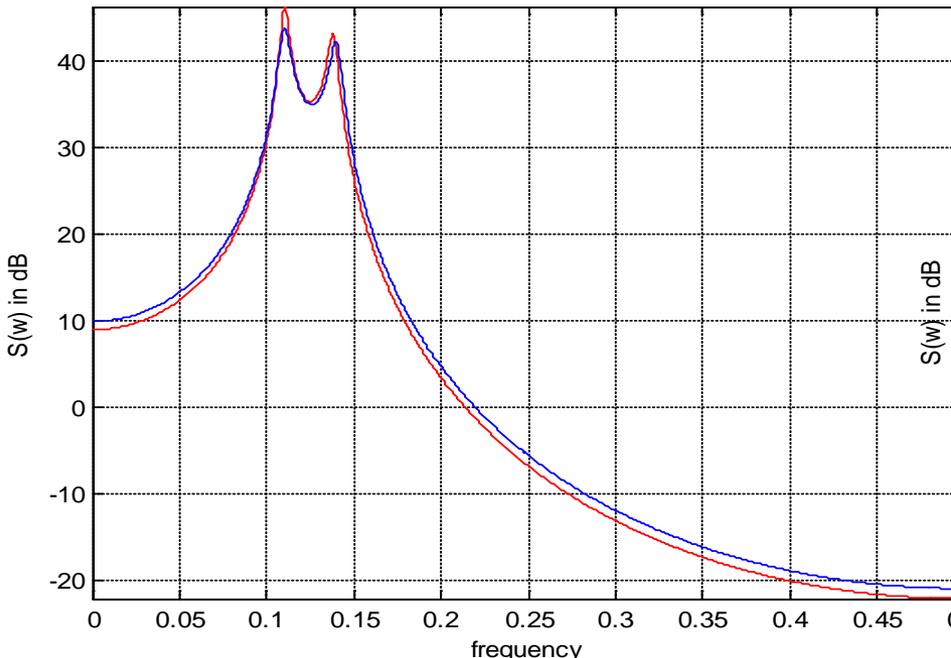
$$S(\omega) = \frac{1}{\sum_{q=-Q}^Q \lambda(q) \exp(jq\omega)} = \frac{1}{\left| a(0) + \sum_{q=1}^Q a(q) \exp(jq\omega) \right|^2}$$

Es decir, máxima entropía es equivalente a adaptar un modelo AR(Q) a los datos. No obstante, el hecho de que AR(Q) sea una solución para estimar el espectro bajo la generalidad de la formulación variacional es lo que motiva su calidad incluso para procesos que no son realmente AR

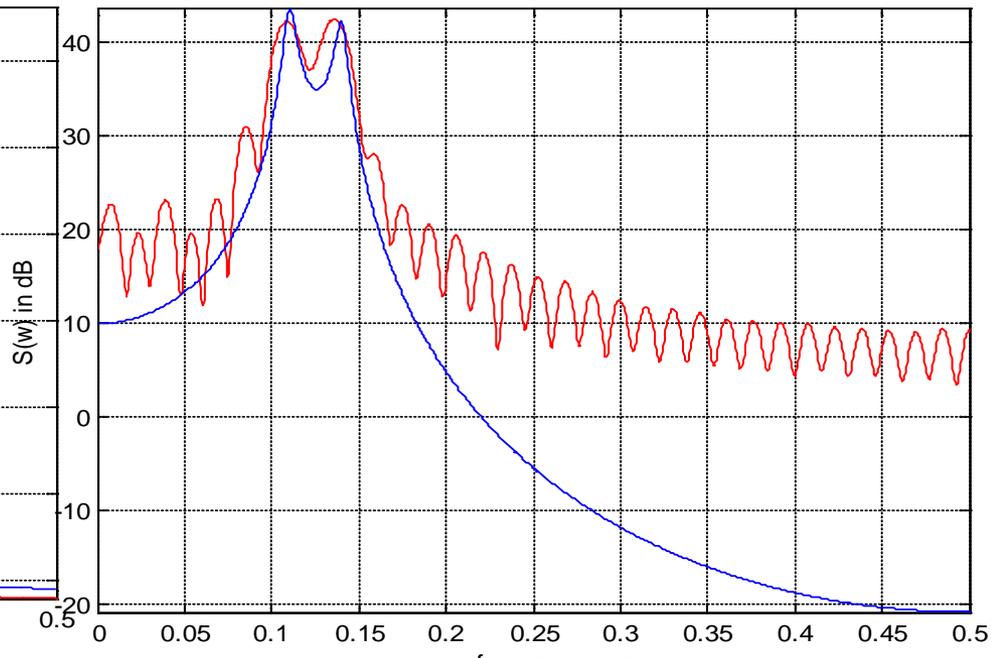
La calidad del estimador cuando el proceso es AR como puede verse es extraordinaria incluso para un número de muestra pequeño ($N=128$, $Q=5$)



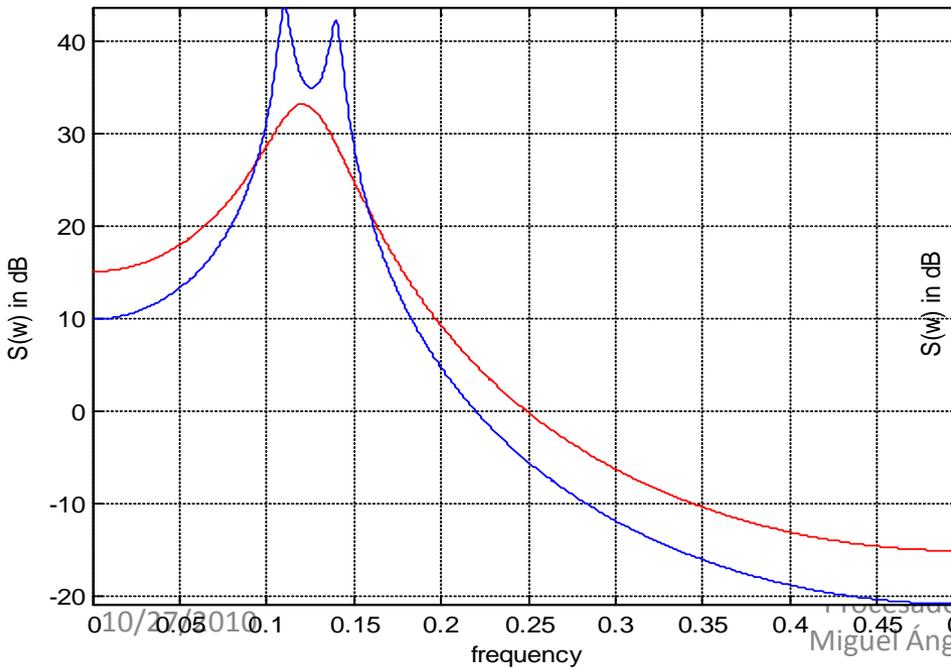
MEM Burg.-AR(5) signal



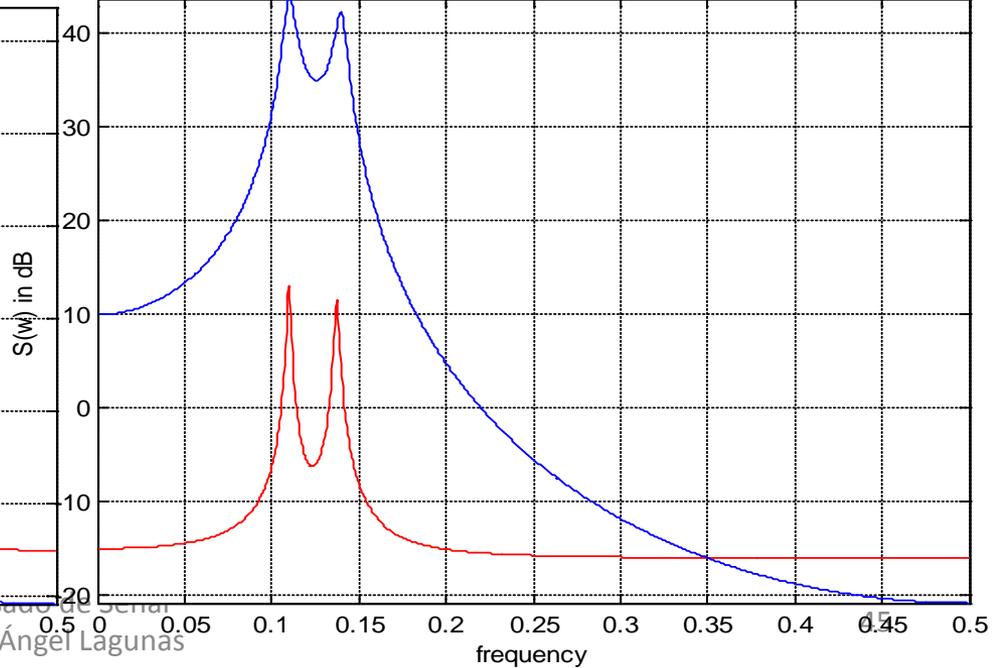
Periodogram Method.-AR(5) signal



MLM Capon.-AR(5) signal

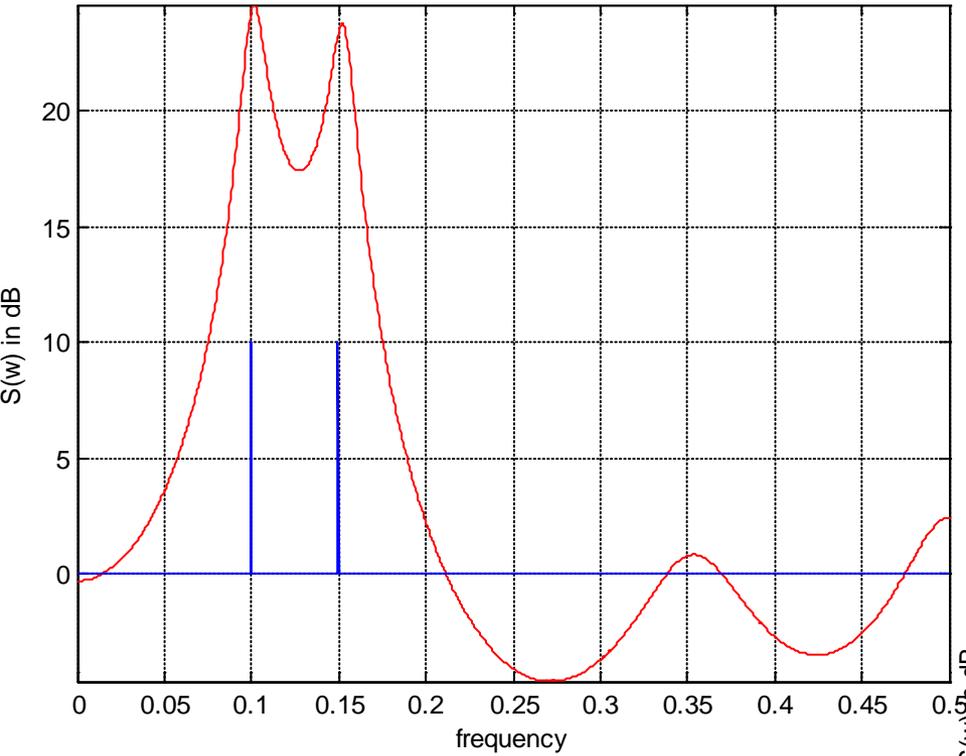


NMLM Normalized.-AR(5) signal

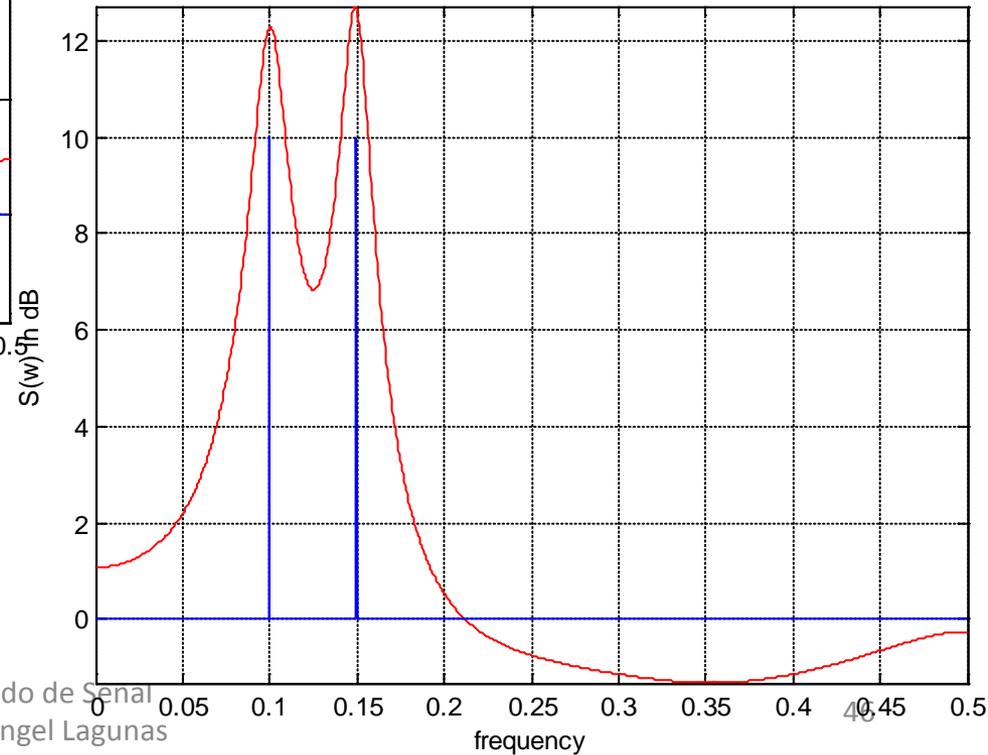


Veamos los resultados para el caso de sinusoides en ruido (No es ni un proceso ni AR)

MEM Burg.-Sinusoides en ruido



NMLM Normalised.-Sinusoides en ruido



ARMA en Métodos Variacionales

Un modelo ARMA resulta ser el óptimo para cuando se desea un estimador de Máxima Entropía sujeto a restricciones de correlación y cepstrum (ver su definición a continuación). Nótese que el cepstrum de lag cero es la entropía del proceso

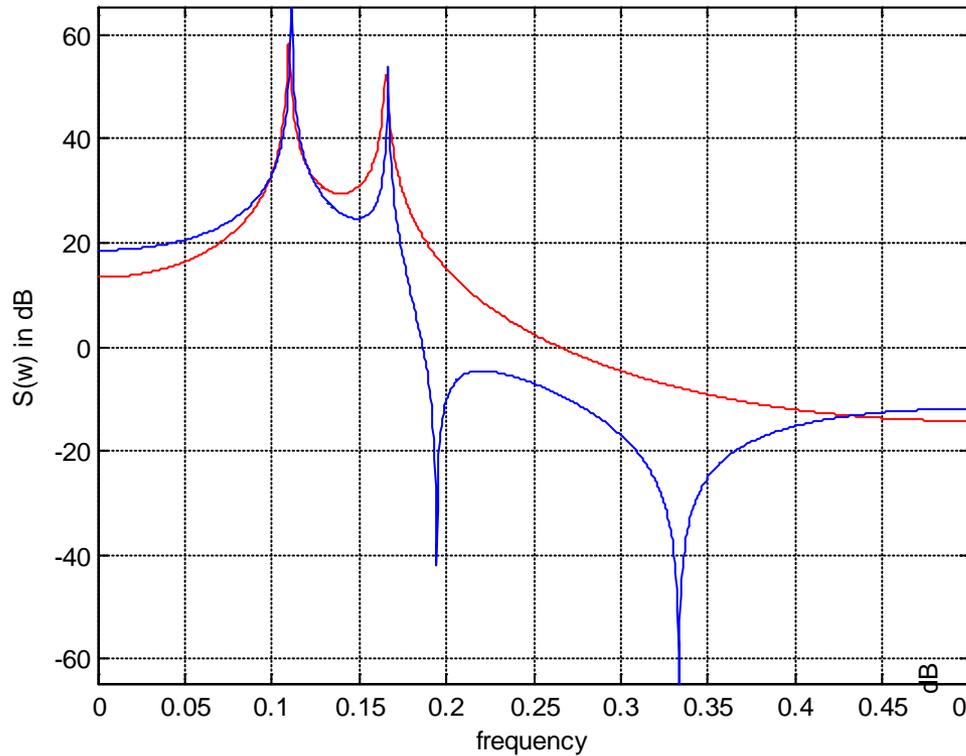
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) \exp(jq\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [P(\omega)] \exp(jq\omega) d\omega = r(q) \quad q = -Q, \dots, Q$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Ln}[S(\omega)] \exp(jq\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Ln}[P(\omega)] \exp(jq\omega) d\omega = c(q) \quad q = -Q, \dots, Q; q \neq 0$$

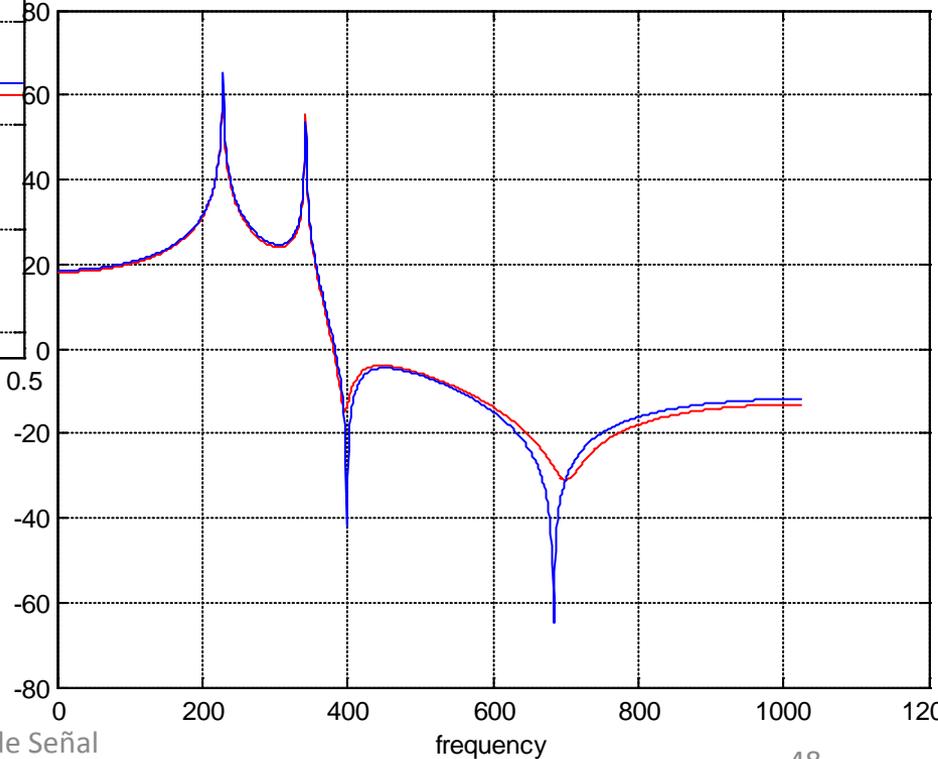
Puede verse que el cepstrum permite obtener la respuesta impulsional del modelo ARMA de fase mínima. Así pues, el modelo ARMA y el estimador se derivan de la misma manera que se indicó en el tema de estimación

Comportamiento MEM (tradicional) y MEM con restricciones de correlación y cepstrum usando el método de Durbin

MEM Burg.-ARMA(5 , 5) signal



ARMA-DURBIN (red) actual(blue)ARMA(5 , 5) signal



Relación de MEM con MLM

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & a_Q(1) & a_Q(2) & \cdots & a_Q(Q) \\ 0 & 1 & a_{Q-1}(1) & \cdots & a_{Q-1}(Q-1) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{Q-2}(Q-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_o^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \sigma_{Q-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_Q^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}}_{MEM}^{S^Q}(\omega) = \underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} \underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{S}} = \sum_{q=0}^Q \frac{1}{\sigma_q^2} \left| \sum_{m=0}^q a_q(m) \exp(-j\omega m) \right|^2 = \sum_{q=0}^Q \frac{1}{S_{MEM}^q(\omega)}$$

Usando la descomposición LDU para la matriz de correlación, precisamente dada por los coeficientes de modelos AR sucesivos y su potencia de la entrada estimada, es fácil comprobar que:

$$\frac{1}{S_Q^{MLM}(\omega)} = \underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{S}}$$

Detectores de Frecuencia (MUSIC)

Más que estimar su densidad espectral, en el caso de sinusoides en ruido, el interés radica en localizar su posición en frecuencia de la manera más precisa posible.

Para obtener un buen detector de frecuencia es preciso explotar el modelo de señal al máximo.

Se considerará el escenario con N_s frecuencias complejas en ruido blanco.

El modelo de los datos sería:

$$x(n) = \sum_{s=1}^{N_s} \alpha_s \exp(jn\omega_s) + w(n)$$

$$\underline{X}_n = \sum_{s=1}^{N_s} \alpha_s \exp(jn\omega_s) \underline{S}_s + \underline{w}_n$$

$$\underline{X}_n = \sum_{s=1}^{N_s} \alpha_s \underline{S}_s + \underline{w}_n$$

Con este modelo la función de auto-correlación, o mejor, la matriz de auto-correlación pasa a ser:

$$\underline{\underline{R}} = \sum_{s=1}^{N_s} |\alpha_s|^2 \underline{\underline{S}}_s \underline{\underline{S}}_s^H + N_o \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{R}}_S + N_o \underline{\underline{I}}$$

Nótese que también a nivel de correlación se mantiene el modelo aditivo de señal mas ruido.

Subespacio de señal:
Formado por N_s vectores independientes que son los vectores S_s de cada senoide. Es decir de Rango N_s

Subespacio de ruido. De rango completo e igual a la longitud de los segmentos de dato Q

La dimensión del espacio de ruido siempre es mayor que la del espacio de señal. Es decir $Q > N_s$

La descomposición en autovalores y autovectores revela con todo el detalle la existencia de estos dos subespacios de señal y ruido.

La descomposición en autovectores y autovalores de la matriz de correlación del sub-espacio de señal es:

$$\underline{\underline{R}}_s \underline{e}_{s,q} = \lambda_{s,q} \underline{e}_{s,q} \quad q = 1, \dots, N_s$$

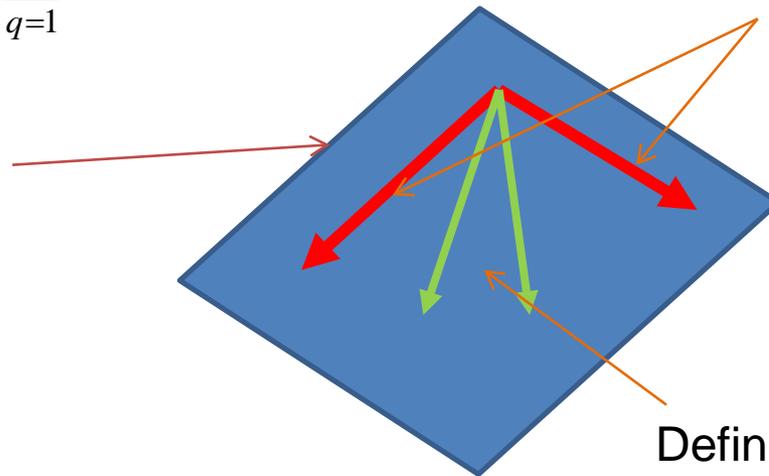
o bien

$$\underline{\underline{R}}_s = \sum_{q=1}^{N_s} |\alpha_q|^2 \underline{S}_q \underline{S}_q^H = \sum_{q=1}^{N_s} \lambda_{s,q} \underline{e}_{s,q} \underline{e}_{s,q}^H$$

Es decir, la base de autovectores es la versión ortonormal que admite los vectores S_s de las sinusoides

Autovectores:
Definen el espacio de señal con vectores ortonormales

Espacio de señal
(Como $N_s=2$ es un plano)



Definen el espacio de señal con vectores que reflejan físicamente el escenario de señal

Por otro lado el sub-espacio de ruido esta formado por Q vectores ortonormales. Nótese que cuando el ruido es blanco, los autovectores que definen el espacio de señal también son autovectores de la matriz de los datos.

$$\underline{\underline{R}}e_{s,q} = \underline{\underline{R}}_S e_{s,q} + N_o \underline{\underline{I}}e_{s,q} = (\lambda_{s,q} + N_o) e_{s,q} \quad q = 1, \dots, N_s$$

Así pues el resto de autovectores

$$\underline{\underline{R}}e_{w,q} = \underline{\underline{R}}_S e_{w,q} + N_o \underline{\underline{I}}e_{w,q} = N_o e_{w,q} \quad q = N_s + 1, \dots, Q$$

Son ortogonales al sub-espacio de señal y todos tienen el mismo autovalor (La densidad de ruido) que es siempre inferior al de los autovalores de señal.

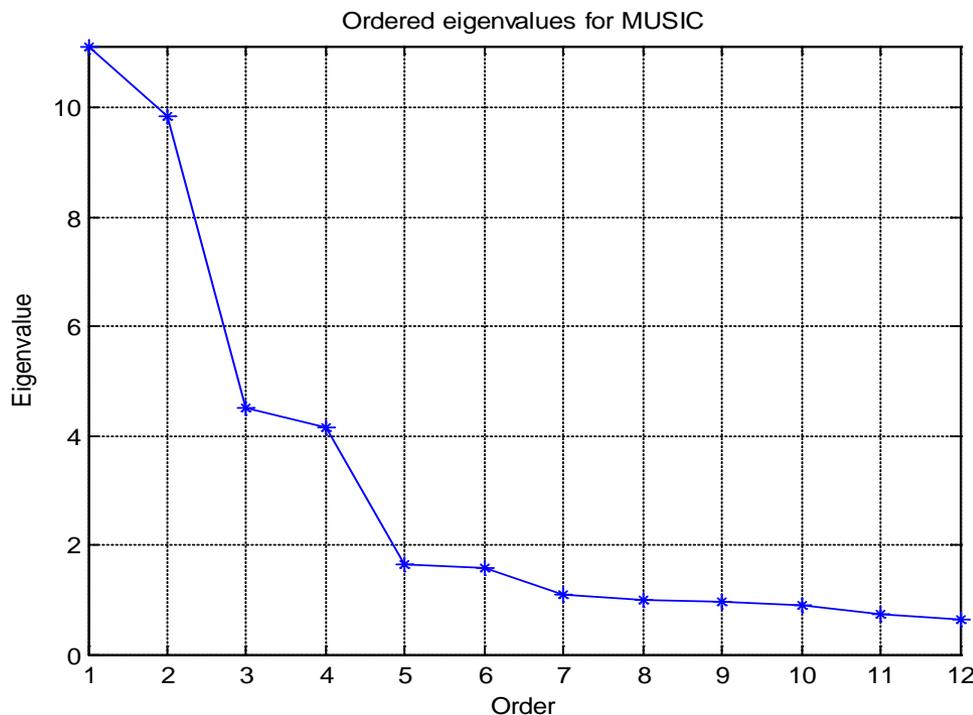
Como estos autovectores son ortogonales al espacio de señal o a las sinusoides existentes en los datos, el estimador es

$$S_{MUSIC}(\omega) = \frac{1}{\sum_{q=N_s+1}^Q \left| \underline{\underline{S}}^H e_{-q} \right|^2}$$

La mayor dificultad de MUSIC estriba en la determinación de la dimensión del espacio de señal. Como se ha visto el único síndrome observable del número de sinusoides es los autovalores y en concreto, a partir de que valor empiezan a ser constantes.

Ejemplo: Dos sinusoides reales (4 complejas) en ruido blanco. La potencia de cada una de ellas es de 0 dB. El orden de la matriz de correlación se ha elegido 12, y su estimación se ha realizado con 128 muestras de la señal

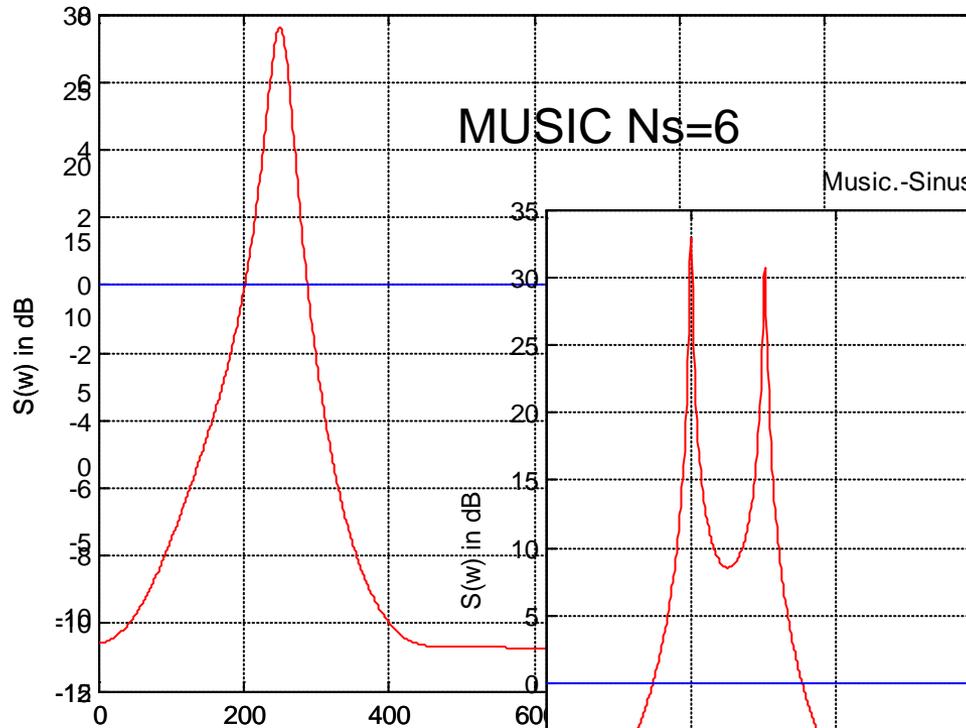
Nótese la dificultad en este caso de determinar el corte.



MUSIC $N_s=4$

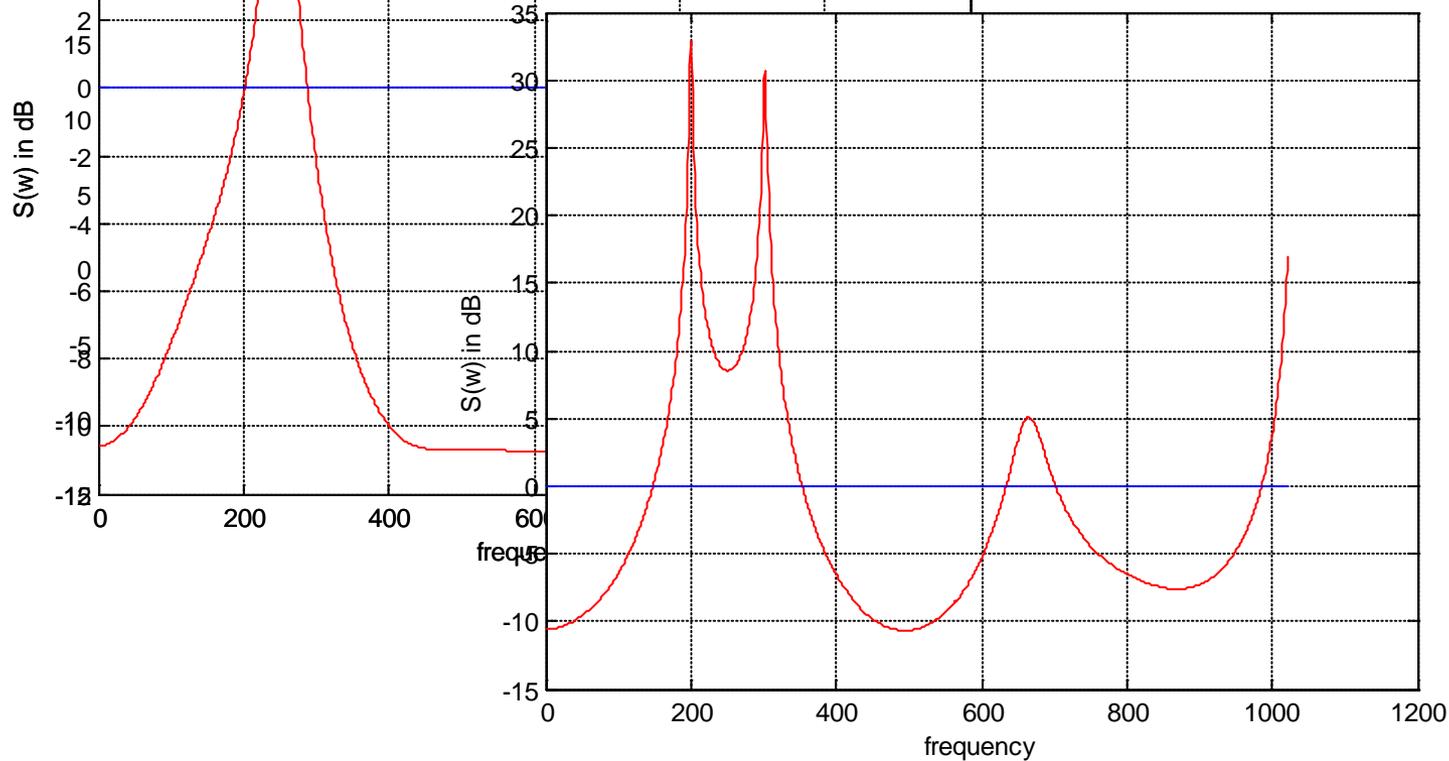
MUSIC $N_s=3$

Music.-Sinusoides en ruido



MUSIC $N_s=6$

Music.-Sinusoides en ruido



SOFTWARE

El programa esta preparado para utilizar directamente

Teclee en la ventana de comandos `spa_gen`

Automáticamente le requerirá en un menú si desea un proceso ARMA, AR, MA o sinusoides en ruido.

Una vez elegido el tipo de señal a analizar, le aparecerá otra ventana con la selección del orden del estimador. Este orden es el del denominador en los métodos paramétricos y el número de coeficientes en MLM y el normalizado, también es el orden de la matriz de correlación en MUSIC

Una vez introducido este valor le aparece en un menú los métodos de análisis espectral disponibles:

Periodograma.- Le aparece en la ventana de comandos el mensaje de que introduzca la longitud del segmento para implementar el método de Welch. La longitud ha de ser menor que la disponible de señal y se recomienda que como máximo sea la mitad de esta.

Correlación.- Estimador sesgado de la correlación. Le preguntara el número de puntos que desea ver en la figura.

LP Levinson. método de Levinson para calcular el predictor lineal y el espectro. En la pantalla le devuelve los coeficientes estimados del modelo AR y la potencia del error de predicción.

MLM Capon.- Automático

NMLM.- Automatico

LP Lattice.- Calculo del modelo AR empleando la red en celosía. Le listara los Parcours y los coeficientes. Puede comparar la mejora entre este procedimiento de calculo de un predictor y el resultado de LP Levinson.

ARMA Máxima entropía.- Le solicitara el orden del numerador. Lista los coeficientes estimados y la potencia del ruido blanco de la entrada.

DURBIN.- método ARMA que también le requiere el orden del numerador. Le lista los coeficientes estimados y la potencia de ruido.

ARMA Pisa.- Igual que ARMA Máxima entropía pero con una estimación del cepstrum en base al logaritmo de la matriz de correlación (Ver notas de procesado). Listado igual al anterior.

KiKa.- método estimación ARMA basado en el cepstrum solamente. La calidad es similar a la de ARMA Máxima entropía.

Music.- Le lista los autovalores y le pide la dimensión del sub-espacio de señal.