

## Capítulo VI

# PROCESADO EN DOS DIMENSIONES

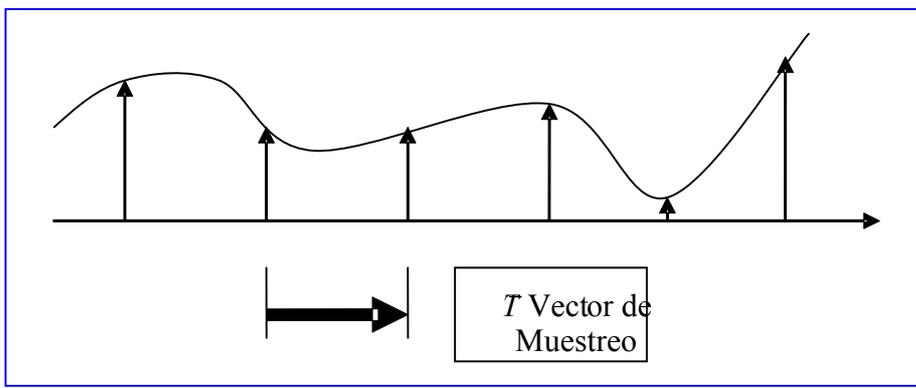


- VI.1 MUESTREO BIDIMENSIONAL
- VI.2 TRANSFORMADA DE FOURIER
- VI.3 LA DFT EN 2D
- VI.4 FILTRADO 2D
- VI.5 ANALISIS ESPECTRAL 2D
- VI.6 TRANSFORMADAS EN 2D
- VI.7 SVD Y CUANTIFICACION
- VI.8 TRANSFORMADA COSENO O  
DCT
- VI.8 EJERCICIOS
- VI.10 REFERENCIAS

## VI.1 MUESTREO BIDIMENSIONAL

El primer paso al tratar de abordar problemas de procesado de señal multidimensional se presenta en como muestrear la señal correspondiente, no ya el estudiar problemas de recuperación o aliasing, sino en la arquitectura o modo de proceder. Aquí, como en otros muchos paralelismos que se aprovecharan con respecto a procesado de señales de dimensión única temporal, es necesario un punto de vista mas elaborado que el habitual para cosas conocidas como son el muestreo unidimensional. Al tomar las muestras de manera uniforme de  $x(t)$  rápidamente pasamos a hablar de la señal  $x(n)$ ; no obstante, el proceso de paso de una a otra merece desmenuzarse un poco mas y dejar de pensar, aunque lo sea, de que se trata de un proceso trivial.

El pasar de  $x(t)$  a  $x(n)$  conlleva indicar dos cosas que son la separación entre muestras o periodo de muestreo (también rango de muestreo) y en que dirección se ha progresar. Así se puede decir que de  $x(t)$  y con un modulo de  $T$  segundos vaya tomando de izquierda a derecha muestras de dicha señal. Nótese que no solo es el periodo entre muestras sino el detalle trivial de que al crecer  $n$  crece  $t$  es el que, formalmente se ha de añadir. En definitiva, el muestreo de una señal unidimensional viene dado por un vector que define tanto modulo como dirección.



**Figura VI.1. Empleo del vector de muestreo en el caso tradicional de 1D.**

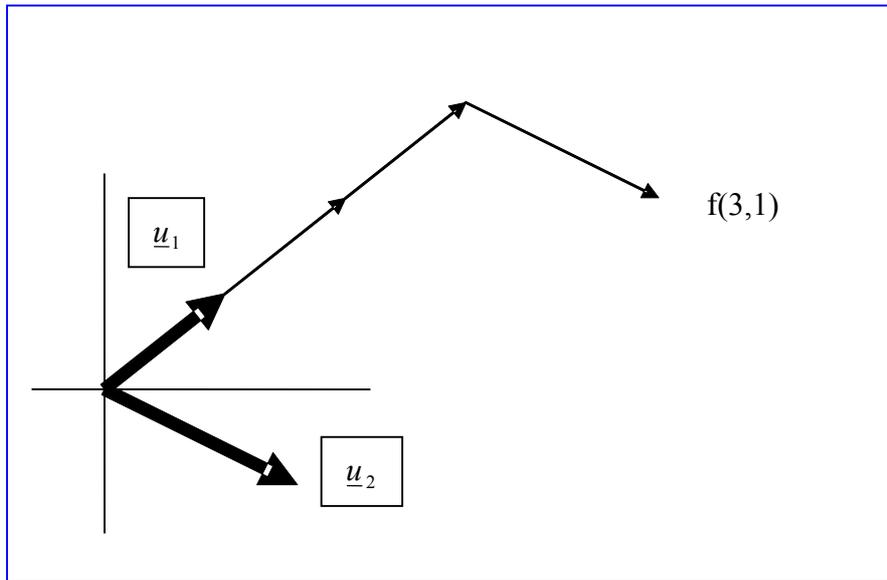
En consecuencia con lo anterior, en un espacio de dos dimensiones, el número de vectores será de dos (igual al número de dimensiones). Dichos vectores se les denominara como  $\underline{u}_1$  y  $\underline{u}_2$ . La matriz que agrupa en sus columnas los vectores de muestreo, se le denominara matriz de muestreo  $\underline{\underline{U}}$ .

$$\underline{\underline{U}} = [\underline{u}_1 \quad \underline{u}_2] \quad (6.1)$$

A partir de este momento, una imagen  $f(x,y)$  se representara por  $f(n1,n2)$ , indicando que se ha tomado la muestra de la imagen original en el punto  $(x,y)$  definido por  $n1$  veces el primer vector mas  $n2$  veces el segundo. En la figura siguiente se ilustra este proceso, al igual que en (6.2).

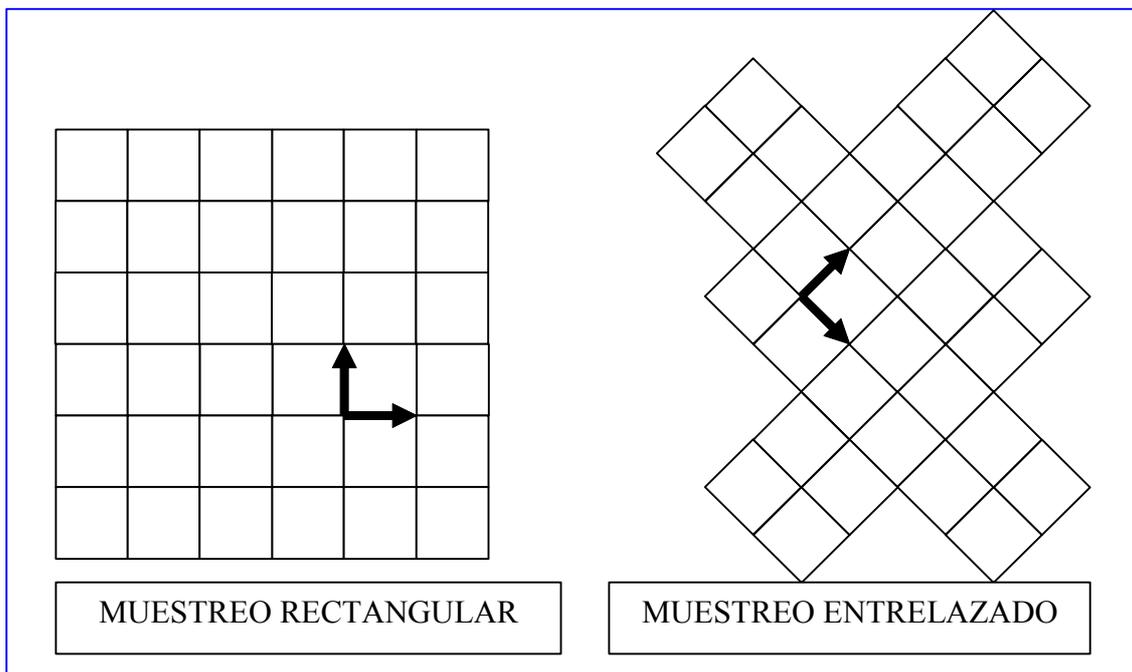
$$f(n1,n2) = f(\underline{e} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{n}) \quad (6.2)$$

$$\text{siendo } \underline{e} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} u_{1,x} & u_{2,x} \\ u_{1,y} & u_{2,y} \end{bmatrix} \quad \underline{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$



**Figura VI.2. Vectores de muestreo en 2D. Situación del píxel (3,1) en la base de muestreo elegida.**

Obviamente cualquier par de vectores, no linealmente dependientes, son validos para formar la matriz de muestreo. A continuación se expondrán los dos casos más habituales que son el muestreo rectangular y entrelazado, este ultimo también denominado hexagonal centrado, triangular, y al tresbolillo en agricultura para la distribución de semilla en la siembra.



**Figura VI.3. Retículas de muestreo para el caso rectangular y entrelazado.**

La matriz de muestreo para cada uno de estos dos casos, para vectores de igual modulo, viene dada por (6.3), donde  $d$  es distancia si  $x$  e  $y$  lo son en la imagen original.

$$\underline{U}_{RECT} = d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{U}_{Entrelazado} = d \begin{bmatrix} 0.5\sqrt{2} & 0.5\sqrt{2} \\ 0.5\sqrt{2} & -0.5\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \underline{U}_{Hexagonal} = d \begin{bmatrix} 0.866 & 0.866 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

La decisión de cual es el impacto de la matriz de muestreo en la capacidad para recuperar a partir de las muestras la imagen original obliga a conocer como se modifica la transformada de Fourier, llegando de este modo a las condiciones para no-solapamiento espectral.

## VI.2 TRANSFORMADA DE FOURIER.

La transformada de Fourier de la señal original viene dada por (6.4):

$$F(\underline{w}) = \iint f(\underline{e}) \cdot \exp[-j \cdot \underline{w}^T \cdot \underline{e}] d\underline{e} \quad \text{donde} \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} \omega \\ \phi \end{bmatrix} \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad d\underline{e} = dx \cdot dy \quad (6.4)$$

Donde el vector  $\underline{w}$  contiene las dos frecuencias  $\omega$  y  $\phi$ , el diferencial del vector espacio  $\underline{e}$  es  $dx \cdot dy$  y la integral doble se realiza en el espacio de existencia de  $f(x,y)$ .

Por otro lado, la transformada de la secuencia o señal muestreada vendría dada por (6.5). Nótese la similitud con la expresión en una dimensión de toda la expresión (el exponente es siempre pulsación por vector de muestreo por el índice entero).

$$FD(\underline{\omega}) = \sum_n f(n) \cdot \exp(-j \cdot \underline{w}^T \cdot \underline{U} \cdot n) \quad (6.5)$$

Obviamente la expresión anterior es periódica en el vector de frecuencias. Encontrar en que dirección se repite es crucial para evitar "aliasing" o solapamiento que impediría la recuperación directa de la señal original. Para conocer la dirección, o direcciones en que va a repetirse basta encontrar cuando el exponente de la FT de la señal muestreada pasa a ser un numero entero de veces  $2\pi$ . Es decir, estamos interesados en conocer el vector  $\underline{dfre}$ , de desplazamiento en frecuencia, que verifica (6.6).

$$FD(\underline{w} + \underline{dfre}) = FD(\underline{w}) \quad (6.6)$$

O bien,

$$\underline{dfre}^T \cdot \underline{U} \cdot n = \text{numero entero} \cdot 2\pi \quad (6.7)$$

La solución viene dada por (6.8) donde, al igual que una dimensión, la inversa de la matriz de muestreo determina donde se va a repetir el espectro. Nótese que la matriz  $\underline{V}$  en sus columnas contiene los dos vectores que en plano de frecuencia posicionan las replicas del espectro original.

$$\text{Matriz de repeticion frecuencia} \triangleright \quad \underline{V} = 2\pi \cdot \underline{U}^{-T} \quad (6.8)$$

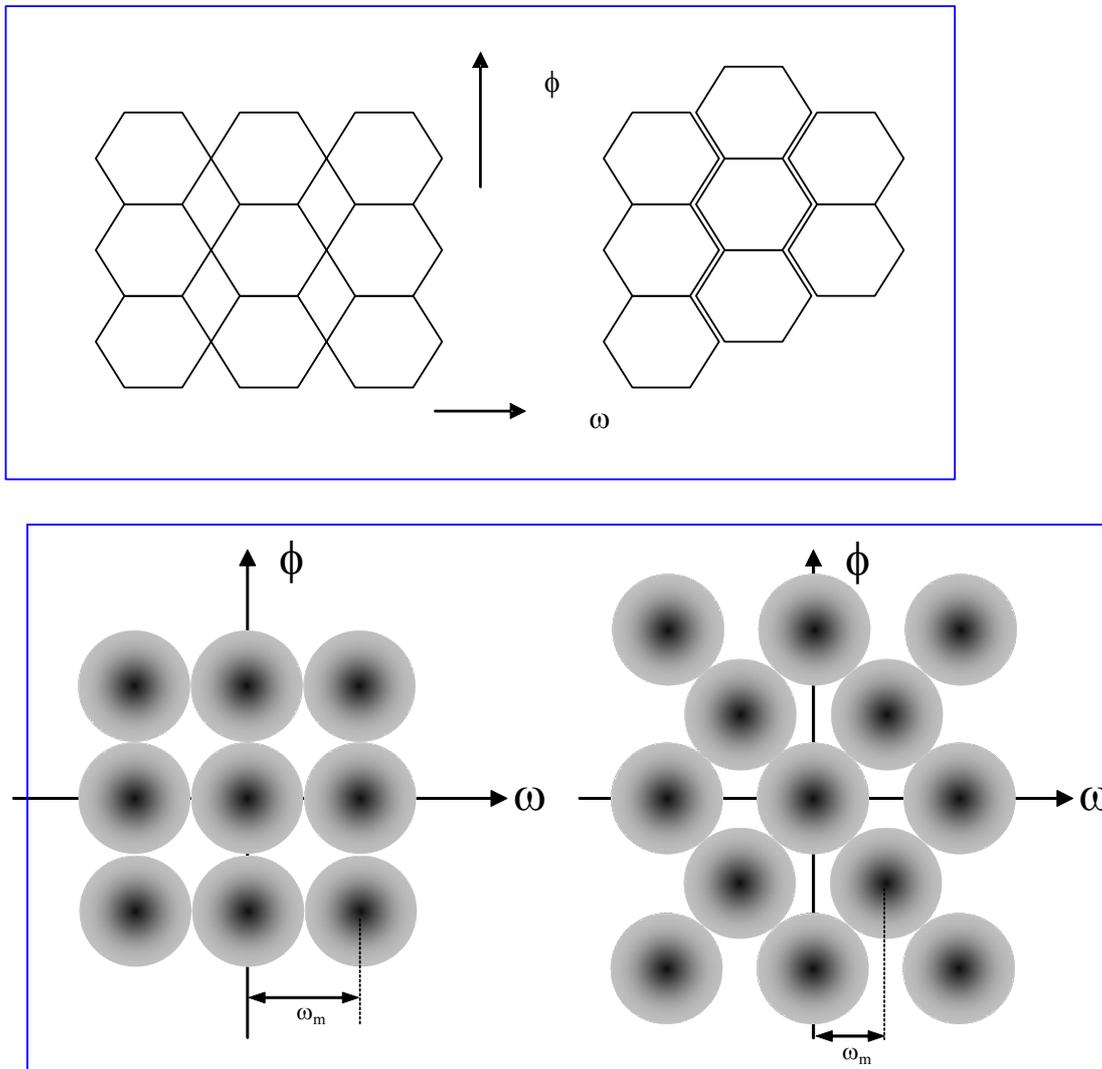
En efecto, cualquier desplazamiento que sea una combinación entera de las columnas de la matriz de repetición provocara que el exponente pase a ser un numero entero de veces  $2\pi$

$$\underline{dfre}^T \cdot \underline{U} \cdot n = \underline{m}^T \cdot \underline{V}^T \cdot \underline{U} \cdot n = 2\pi (\underline{m}^T \cdot n) \quad (6.9)$$

Para los casos de muestreo rectangular y hexagonal, de (6.10), puede comprobarse que la repetición sigue el mismo patrón, es decir, rectangular o hexagonal, en lo que se refiere a la forma en que el espectro se repite en el plano de frecuencia respectivamente.

$$\underline{V}_{=rect} = \frac{2\pi}{d} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{V}_{=hexag} = \frac{2\pi}{d} \begin{bmatrix} 0.5774 & 1 \\ 0.5774 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Si se considera, como es habitual, que el soporte del espectro correspondiente a la señal original es circular, la Figura VI.4 indica que patrón producen cada uno de los dos muestreos en el plano frecuencial.



**Figura VI.4. Repetición espectral para muestreo rectangular y entrelazado. Nótese que las frecuencias de muestreo en el caso de la derecha son inferiores a las de la izquierda.**

En cualquiera de los dos casos si  $B$  es el ancho de banda radial del espectro, si  $d$  es mayor que la inversa de  $2B$  no se producirá aliasing y se podrá extraer la señal original de un filtro paso bajo de la señal muestreada.

En la Figura VI.5 puede verse la repetición que en el dominio transformado tiene lugar cuando se duplica o se cuadruplica la distancia entre muestras usando muestreo rectangular. Puede observarse que el aliasing no es evidente, dado el elevado nivel relativo que contiene toda imagen en baja frecuencia.

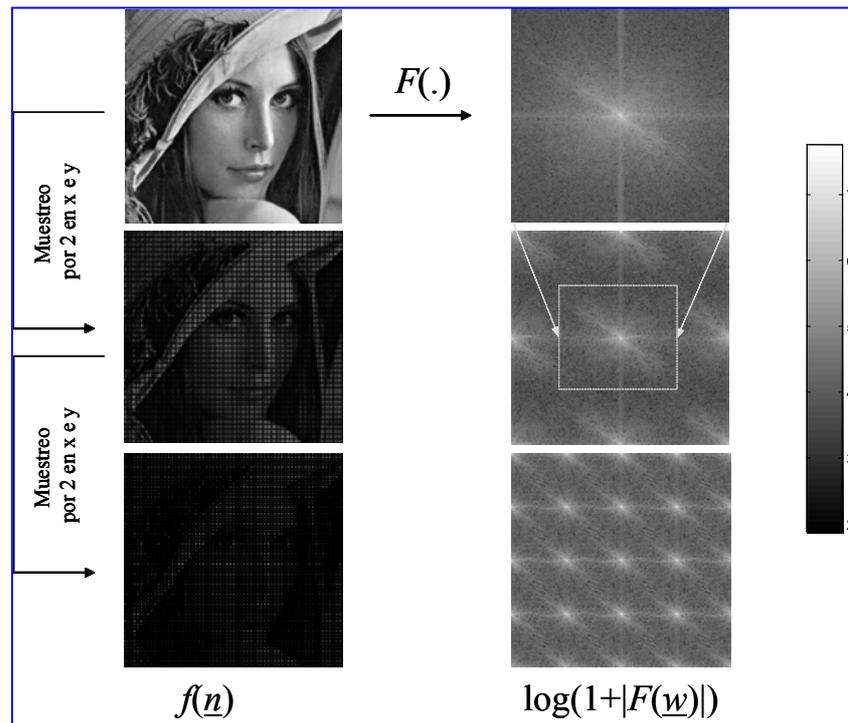


Figura VI.5. Efecto de repetición por submuestreo.

### VI.3 LA DFT EN 2-D.

Dada la transformada de Fourier de la secuencia, en estos momentos sé esta interesado en conocer cuantas muestras son necesarias en el dominio frecuencial para poder recuperar la imagen  $f(n_1, n_2)$  a partir de ellas. La transformada inversa de Fourier viene dada por la expresión (6.11).

$$f(\underline{n}) = \frac{1}{\det(\underline{U}^T \cdot \underline{V})} \iint DF(\underline{w}) \cdot \exp(j[\underline{n}^T \cdot \underline{U}^T \cdot \underline{w}]) \cdot d\underline{w} \quad (6.11)$$

La cuestión ahora es determinar como muestrear en frecuencia, digamos que con una matriz de muestreo  $\underline{u}$ , tal que se verifique (6.12).

$$f(\underline{n}) = \frac{1}{\det(\underline{U}^T \cdot \underline{\Psi})} \sum_{\underline{m}} DF(\underline{m}) \cdot \exp(j2\pi[\underline{n}^T \cdot \underline{U}^T \cdot \underline{\Psi} \cdot \underline{m}]) \quad (6.12)$$

$$\text{con } \underline{w} = 2\pi \cdot \underline{\Psi} \cdot \underline{m}$$

Como es conocido, el muestrear en un dominio tiene como consecuencia periodificar en el otro, es decir, el muestreo en frecuencia implícito en (6.12) conlleva repetir en el plano  $(n_1, n_2)$  con una matriz de repetición  $\underline{N}$  según sigue:

$$f(\underline{e} = \underline{U}\underline{n}) = f(\underline{e} = \underline{U}[\underline{n} + \underline{N}\underline{l}]) \quad (6.13)$$

Es decir, es como si el índice se desplazase en  $\underline{U}\underline{N}$ ; al mismo tiempo, si se ha muestreado en frecuencia con  $\underline{u}$  es conocido que la repetición en el dominio del índice discreto es  $\underline{u}^T$ . En definitiva, dada la matriz de repetición  $\underline{N}$ , que permite el no-solapamiento en el dominio de la secuencia, la matriz de muestreo en frecuencia pasa a ser (6.14).

$$\underline{\underline{\Psi}}^{-T} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{N}} \quad \text{o bien} \quad \underline{\underline{\Psi}}^T = \underline{\underline{N}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1} \quad ; \quad \underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{U}}^{-T} \cdot \underline{\underline{N}}^{-T} \quad (6.14)$$

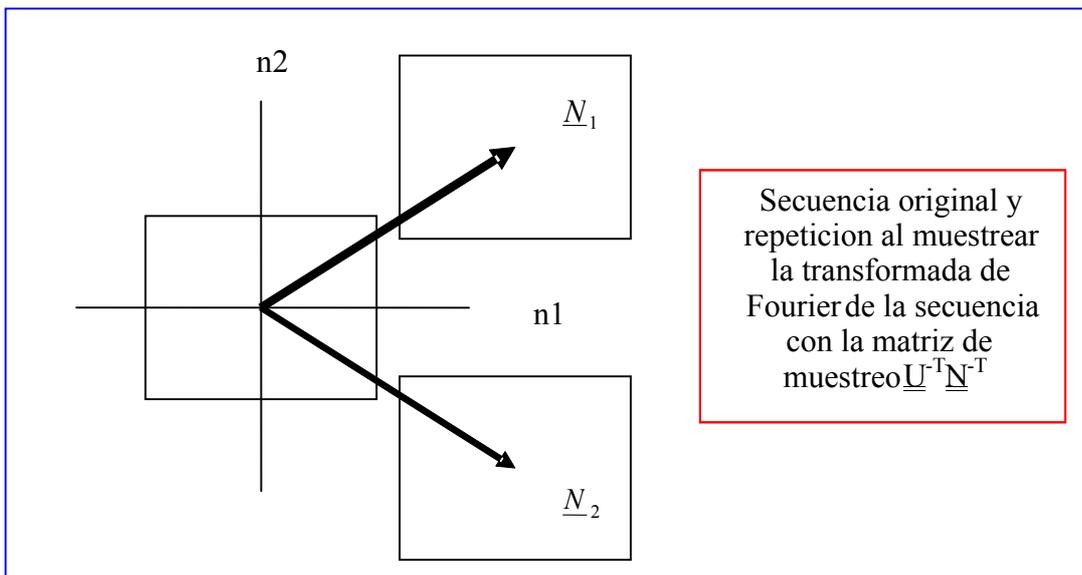
Esta última matriz fija la resolución con que se muestrea en frecuencia y, al sustituirla en la expresión de la transformada de Fourier (6.12), proporciona la expresión de la Transformada discreta de Fourier de la secuencia  $f(n_1, n_2)$  o  $f(\underline{n})$ .

$$DF(\underline{m}) = \sum_{\underline{n}} f(\underline{n}) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi \cdot \underline{n}^T \cdot \underline{\underline{N}}^{-1} \cdot \underline{m})$$

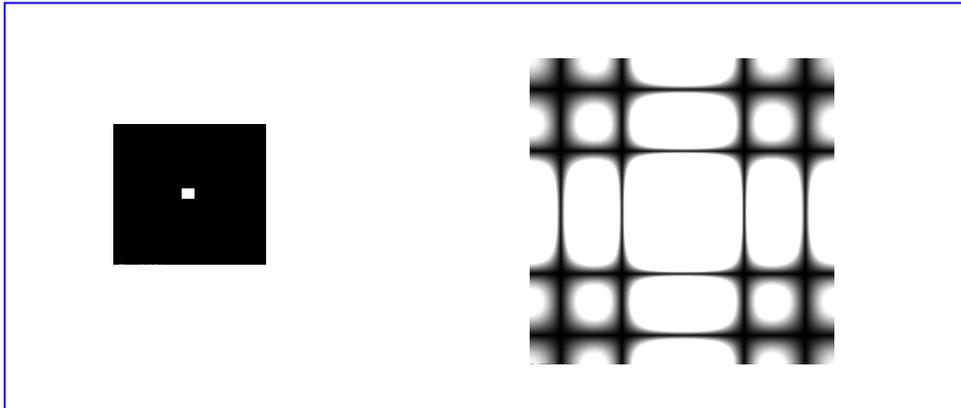
$$f(\underline{n}) = \frac{1}{\det(\underline{\underline{N}})} \cdot \sum_{\underline{m}} DF(\underline{m}) \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot \underline{m}^T \cdot \underline{\underline{N}}^{-T} \cdot \underline{n}) \quad (6.15)$$

Como puede observarse en la Figura VI.6, la elección de los vectores  $\underline{N}_1$  y  $\underline{N}_2$  que forman la matriz de repetición en secuencia  $\underline{\underline{N}}$  ha de hacerse de modo y manera que no exista solapamiento en la secuencia  $f(\underline{n})$  al repetirla. La división por el determinante de esta en la transformada inversa proviene de que el número de puntos que resultan al muestrear en frecuencia el recinto es precisamente ese determinante que también determina el número de ceros a añadir para completar el recinto original en el caso de requerirse una extrapolación en frecuencia, es decir, más puntos de transformada que de datos o muestras en la imagen original.

Nótese que al margen del tipo de muestreo elegido en el dominio original, el usuario puede elegir, de nuevo, el tipo de muestreo que desea hacer en frecuencia. Es decir, se puede dar la situación de muestreo rectangular en el dominio  $(x, y)$  y muestreo hexagonal en el dominio  $(\omega, \phi)$ . En la Figura VI.7, que sigue, puede verse la DFT de la imagen de la izquierda, un pulso cuadrado y su correspondiente transformada de Fourier

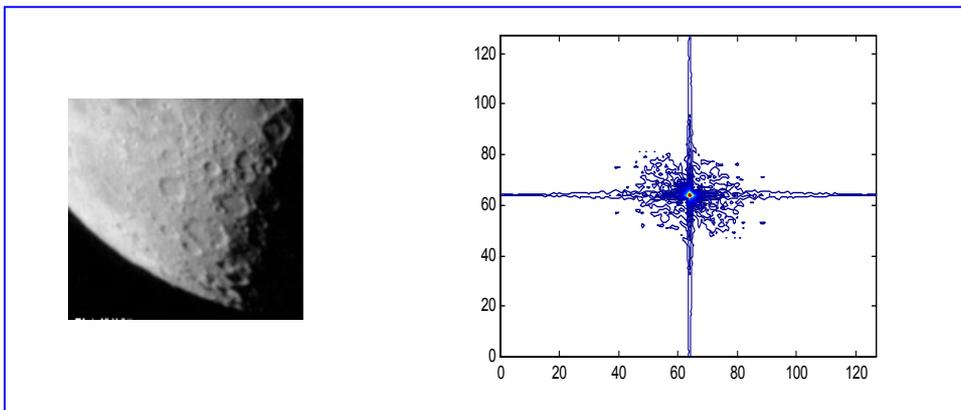


**Figura VI.6. Vectores de muestreo en el plano frecuencial para llegar a la DFT en 2D.**



**Figura VI.7. DFT2 (en modulo a la derecha) de un pulso rectangular (a la izquierda).**

La siguiente figura muestra la transformada de Fourier de la imagen “Moon”, nos referiremos como MO, disponible el Matlab™.



**Figura VI.8. 2D-DFT de la imagen de la izquierda. Nótese que la mayor parte del contenido espectral se encuentra en las proximidades del origen.**

#### VI.4 FILTRADO 2D.

La ecuación de convolución es prácticamente la misma que en el caso de una dimensión. La expresión de la señal de salida  $y(.,.)$  en función de la entrada  $x(.,.)$  y la respuesta del filtro  $h(.,.)$  viene dada por (6.16).

$$y(r,s) = \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q h(p,q) \cdot x(r-p,s-q) \quad (6.17)$$

Una formulación de tremendo interés, tanto teórico como práctico es la siguiente:

$$y(r,s) = \text{Traza}(\underline{h} \cdot \underline{X}_{r,s})$$

donde  $\underline{h} = \begin{bmatrix} h(0,0) & \dots & h(0,Q) \\ \dots & \dots & \dots \\ h(P,0) & \dots & h(P,Q) \end{bmatrix}$  y  $\underline{X}_{r,s} = \begin{bmatrix} x(r,s) & \dots & x(r-P,s) \\ \dots & \dots & \dots \\ x(r,s-Q) & \dots & x(r-P,s-Q) \end{bmatrix}$  (6.18)

El interés de esta formulación es que permite indagar la separabilidad en dos filtros 1D el filtrado original, demostrando el valor de la descomposición en valores singulares, o SVD, en tratamiento de

imagen  $y$ , en general, en procesamiento de señal. En efecto, si se utiliza la descomposición SVD de la matriz de filtrado, que viene dada por (6.19).

$$\underline{h} = \sum_{m=1}^{\min(P,Q)} \theta_m \underline{u}_m \underline{v}_m^H \quad (6.19)$$

Donde  $\theta$  son los autovalores y  $\underline{u}$  y  $\underline{v}$  los autovectores por la izquierda y por la derecha de la matriz de filtrado, entonces las muestras de la salida toman la expresión de la combinación de formas cuadráticas. Estas formas cuadráticas, que se corresponden a una matriz de filtrado de rango uno, no son mas que el resultado de filtrar por filas y columnas la imagen de entrada en (6.17). Reacuérdesse la circularidad de la operación  $\text{Traza}(\cdot)$ , es decir,  $\text{Traza}(A.B.C)$  es igual a  $\text{Traza}(B.C.A)$ .

$$y(r,s) = \sum_{m=1}^{\min(P,Q)} \theta_m \left[ \underline{v}_m^H \underline{X}_{r,s} \underline{u}_m \right] \quad (6.20)$$

A partir de la expresión anterior, puede deducirse que cuando el autovalor máximo es significativamente mayor que el resto de autovalores, no se apreciara ninguna diferencia práctica entre el filtrado 2D y dos filtrado 1D uno por filas y otro por columnas de mucha mayor sencillez.

La ultima expresión alternativa para la ecuación de convolución consiste en vectorizar tanto la matriz de filtrado como la de entrada,

$$\underline{h}_e = \text{vec}(\underline{h}) \quad \underline{X}_{r,s,e} = \text{vec}(\underline{X}_{r,s}) \quad (6.21)$$

Con estos dos vectores, la ecuación de convolución no ofrece en absoluto ninguna diferencia con la obtenida para 1D.

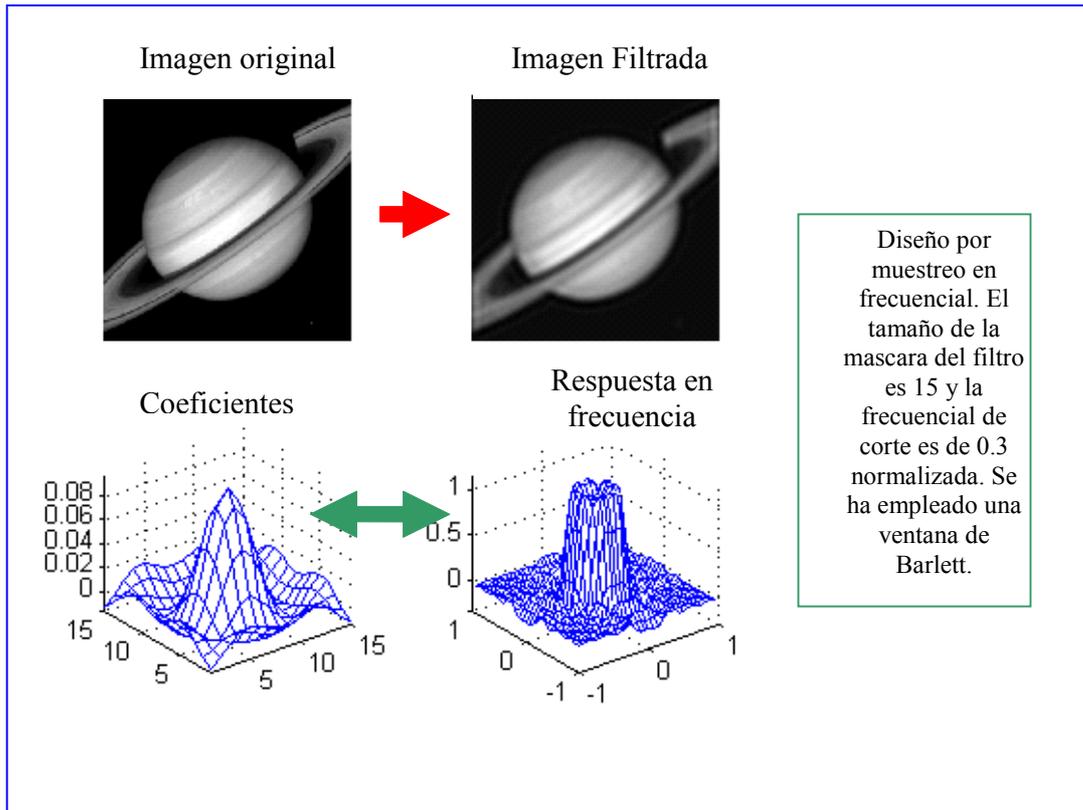
$$y(r,s) = \underline{h}_e^H \underline{X}_{r,s,e} \quad (6.23)$$

Esta expresión convierte en validos para 2D todos los conocimientos contenidos en el capítulo dedicado a filtrado MSE, predicción lineal y aquellos contenidos en el capítulo anterior dedicado a filtrado adaptativo.

Las similitudes se mantienen también en lo que se refiere a diseño de filtros. No obstante, la difícil noción de causalidad y la dificultad de establecer la estabilidad de sistemas recursivos hacen que el diseño se restrinja al caso de filtros FIR.

En general, todas las técnicas parten de diseños por muestreo en frecuencia de la respuesta ideal deseada y luego optimizados en su caso para un mejor compromiso entre banda de transición y banda eliminada.

En la Figura VI.9, obtenida ejecutando la instrucción “firdemo” en Matlab™ puede verse el efecto de un filtro paso bajo diseñado por muestreo en frecuencia y usando una ventan de Barlett para reducir el nivel de lóbulo lateral en frecuencia.



**Figura VI.9. Obtenida de ejecutar “firdemo” en Matlab™ muestra la matriz de filtrado, respuesta en frecuencia, imagen original e imagen filtrada. Se hace evidente el efecto de difuminado que tiene lugar al filtrar paso-bajo la imagen original.**

## VI.5 ANALISIS ESPECTRAL 2D.

Como ya se ha comentado el concepto de causalidad en 2D es difícil de asimilar y, en consecuencia, es difícil de aplicar la noción de modelo racional a la señal observada. Por esta razón, no es de extrañar la irrelevancia de métodos publicados hace años que pretendían la extensión del análisis espectral paramétrico a más de una dimensión. En la actualidad, prácticamente los métodos viables para análisis espectral se reducen a aquellos basados en bancos de filtros.

La ecuación (6.23) permite la extensión automática a 2D de los métodos del tipo WOSA o basados en el periodograma, así como los de tipo MLM y NMLM. Las diferencias son mínimas y se reducen a la forma que toman los vectores de enfoque en frecuencia y el vector de datos, así como su matriz de correlación.

La ecuación del filtro a diseñar es según sigue:

$$\begin{aligned}
 \text{Ecuación de filtrado} \quad y(r,s) &= \underline{h}_e^H \cdot \underline{X}_{r,s,e} \\
 \underline{h}_e^H &= [h(0,0), \dots, h(0,Q), h(1,0), \dots, h(P,0), \dots, h(P,Q)] \\
 \underline{X}_{r,s,e}^H &= [x(r,s), \dots, x(r,s-Q), x(r-1,s), \dots, x(r-P,s), \dots, x(r-P,s-Q)]
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

El filtro se diseña con la restricción de ganancia de cero dB a la frecuencia seleccionada.

$$\begin{aligned}
 \underline{h}_e^H \cdot \underline{S}_e &= 1 \\
 \underline{S}_e^H &= [1, \dots, e^{jQ\omega}, e^{j\psi}, \dots, e^{j(P\psi)}, \dots, e^{j(P\psi+Q\omega)}]
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

La potencia a la salida del filtro diseñado viene dada por (6.26) así como el ancho de banda al ruido del filtro 2D.

$$\begin{aligned}
 P(\omega, \psi) &= \underline{h}_e^H \cdot \underline{C} \cdot \underline{h}_e \quad \text{donde} \quad \underline{C} = \sum X_{r,s,e} \cdot X_{r,s,e}^H \\
 B_N(\omega, \psi) &= \underline{h}_e^H \cdot \underline{h}_e \\
 \hat{S}_x(\omega, \psi) &= \frac{P(\omega, \psi)}{B_N(\omega, \psi)}
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Al margen de la complejidad por las dimensiones de los vectores y matrices empleados, se le añade a cualquier procedimiento el hecho de que la matriz de covarianza, definida en la formula anterior no es Toeplitz ( se deja a la comprobación del lector).

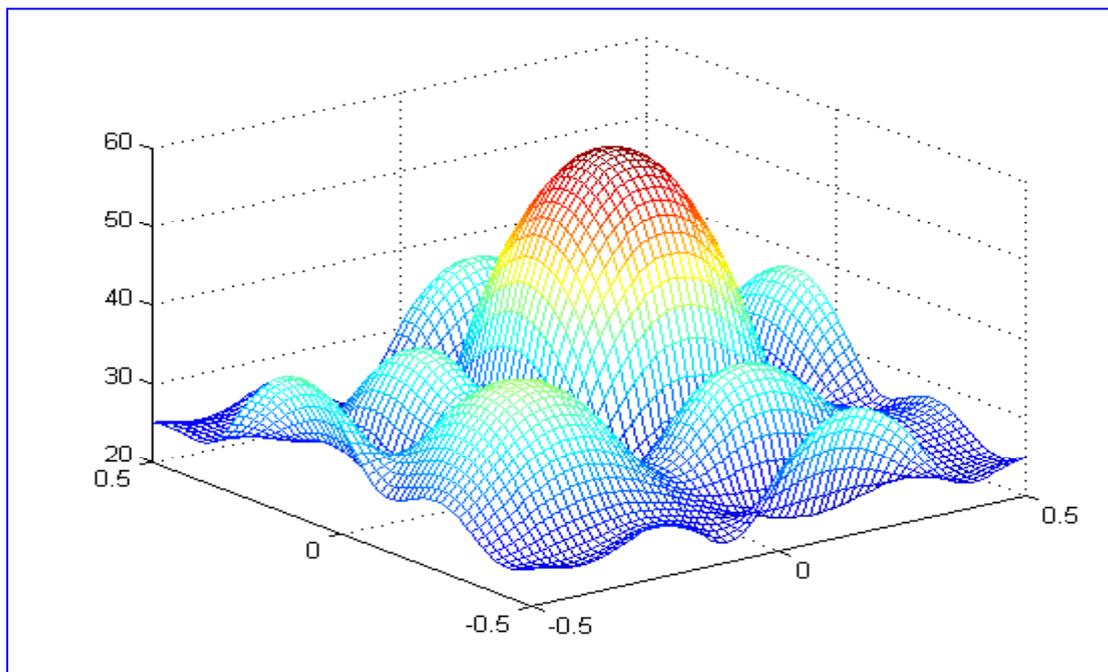
Tanto WOSA en 2D como MLM 2D se derivan del mismo modo que en el capítulo tercero., El caso de WOSA es hacer que el filtro sea idéntico al vector de enfoque; el caso de MLM es minimizar la potencia con la restricción (6.25). Obviamente, el estimador normalizado se obtiene como se indica en (6.26) al dividir la potencia estimada por el ancho de banda equivalente al ruido del filtro diseñado.

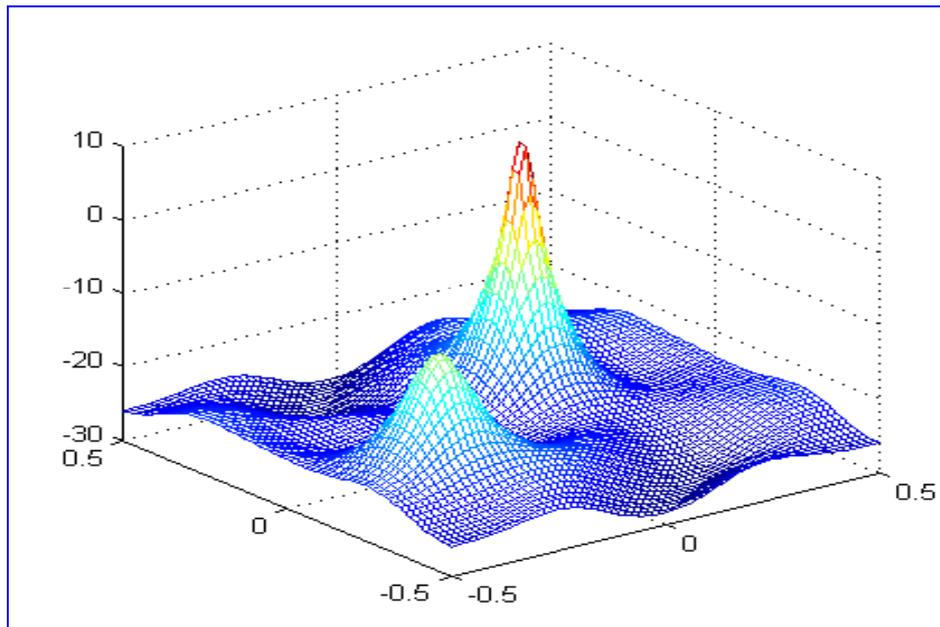
En las figuras que siguen pueden verse los tres estimadores para el caso de de señal radar de onda continua. Cada segmento de señal  $y(x)$  corresponde al retorno en velocidad o doppler mientras que  $x(y)$ , es decir, la fase con la que comienza cada record o segmento contiene informaron de rango. Así pues, la frecuencia  $w_y$  proporciona posición y la frecuencia  $w_x$  proporciona velocidad. La señal puede considerarse como un fasor en dos dimensiones por blanco en el escenario y se formularia según (6.27).

$$f(x, y) = \sum_s A_s \cdot \exp(-[w_{xs} \cdot x + w_{ys} \cdot y]) + w(x, y) \tag{6.27}$$

Siendo  $w(.,.)$  ruido gaussiano y blanco. Las dimensiones de la imagen radar son de 32 por 32 puntos en todos los casos que se describirán.

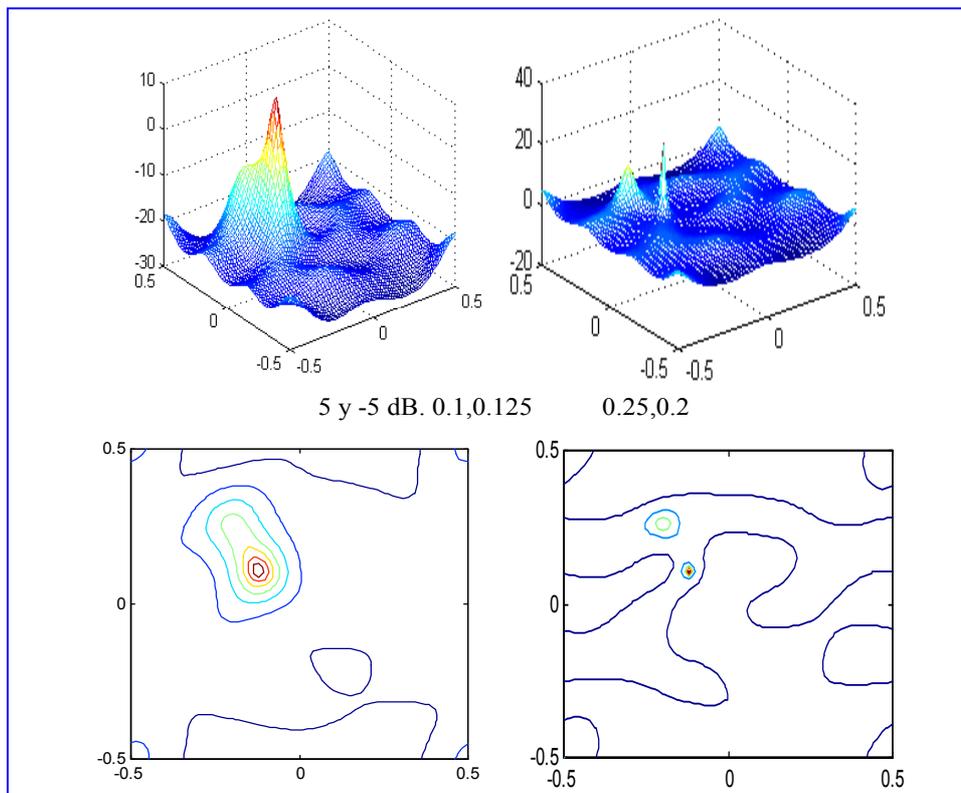
La Figura VI.10 presenta en su parte superior el periodograma 2-D para dos fuentes. Como puede verse en esta figura el periodograma evidencia los mismos problemas de falta de resolución en 2D que presentaba en una dimensión, puesto que en el escenario existen dos fuentes.





**Figura VI.10. Arriba estimación mediante el periodograma y abajo con MLM para dos rayas frecuenciales.**

A continuación, la siguiente figura presenta la extraordinaria resolución del método normalizado versus MLM cuando los dos blancos están próximos y existe una diferencia de 15 dB en su magnitud o potencia.



**Figura VI.11. Estimador MLM a la derecha y NMLM a la izquierda para dos rayas situadas en frecuencias próximas y con dinámica muy diferente 15 y 0 dBs.**

Como ya se ha mencionado, fuera de los procedimientos mencionados, los métodos paramétricos o basados en un modelo de señal carecen de sentido, en general, en más de una dimensión. No obstante, predicción lineal y técnicas basadas en SVD sí que pueden aplicarse en 2D. En cualquier caso, la robustez ante un tamaño reducido de los datos las hace poco interesantes respecto a MLM y NMLM. Por todo ello, en la actualidad, añadiendo el periodograma por su sencillez, estos son los únicos métodos de análisis espectral multidimensional considerados de interés.

## VI.6 TRANSFORMADAS EN 2D.

En un apartado anterior se ha mostrado como la transformada de Fourier traslada al plano frecuencial la información contenida en una señal 2D. El interés del dominio transformado radica en que, aunque la energía es la misma, esta se distribuye de manera diferente en un dominio con respecto al otro. De este modo, lo que en el plano espacial ocupa un recinto de  $N \times N$  puede, en el plano transformado, ocupar una región  $M \times M$  considerablemente más pequeña. Si  $M$  es mucho menor que  $N$  la representación con aritmética finita, o número de bits limitado, en el dominio transformado será mucho más eficiente, menor MSE con la imagen original, que en el dominio espacial. Por esta razón, ha de entenderse el gran interés que para señales sin modelos de generación, como era el caso de voz, tienen las diferentes transformadas en la codificación de imagen. La cuestión es saber cuál es la transformada que más concentra la energía, es decir, de los  $N \times N$  coeficientes, que transformada presenta menos MSE en su anti-transformada cuando se limita el número de coeficientes por debajo del valor anterior de  $N \times N$ .

La formulación del problema sería la siguiente: Si  $\underline{X}$  es la imagen original de tamaño  $N \times N$ , se trata de representarla en base a  $N^2$  imágenes unitarias  $\underline{A}_n$ , con  $N^2$  coeficientes, de modo y manera que el error entre una versión truncada, digamos a  $M^2$  (con  $M < N$ ) coeficientes, tenga el menor MSE definido como el valor esperado de la norma de Frobenius de la diferencia de ambas matrices.

$$\min E \left\{ \left\| \underline{X} - \sum_{p,q=1}^{M,M} \phi_{pq} \underline{A}_{pq} \right\|_F \right\}$$

$$\text{sujeto a } \text{Traza}(\underline{A}_{pq}^H \underline{A}_{pq}) = 1 \quad \text{y} \quad \text{Traza}(\underline{A}_{pq}^H \underline{A}_{rs}) = 0; \forall p \neq q \cup r \neq s \quad (6.28)$$

con  $M < N$

Claramente,

$$\phi_{pq} = \text{Traza}(\underline{A}_{pq}^H \underline{X}) \quad (6.29)$$

Nótese que si los elementos de la imagen original se consideran variables aleatorias, también serán los coeficientes.

Es fácil comprobar que la solución al problema planteado por (6.28) viene dada por (6.30).

$$E(\underline{X} \underline{X}^H) \underline{A}_{pq} = \lambda_p \underline{A}_{pq}$$

$$E(\underline{X}^H \underline{X}) \underline{A}_{pq}^H = \lambda_q \underline{A}_{pq}^H \quad (6.30)$$

La ecuación anterior tiene una solución de rango uno para la matriz según se indica en (6.31.a).

$$\underline{A}_{pq} = \underline{u}_p \underline{v}_q^H$$

$$\underline{u}_n^H \underline{u}_m = \underline{v}_n^H \underline{v}_m = \delta_{nm} \quad \text{ortonormales} \quad (6.31.a)$$

$$E(\underline{X} \underline{X}^H) \underline{u}_p = \lambda_p \underline{u}_p \quad \text{autovector por la izquierda de } \underline{X}$$

$$E(\underline{X}^H \underline{X}) \underline{v}_q = \lambda_q \underline{v}_q \quad \text{autovector por la derecha de } \underline{X}$$

Así pues, la transformación óptima resulta ser la denominada descomposición en valores singulares de las dos matrices de correlación definidas según (6.31). De hecho, si el número de matrices disponibles es elevado, los autovalores por la izquierda y por la derecha coinciden con lo que tan solo una matriz de autovectores es necesaria.

También es fácil comprobar que se verifica (6.31.b).

$$\begin{aligned} \underline{\underline{X}} &= \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\phi}} \cdot \underline{\underline{V}}^H \\ E[\underline{\underline{\phi}} \cdot \underline{\underline{\phi}}^H] &= \text{diagonal}(\lambda_k); k = 0, N-1 \end{aligned} \quad (6.31.b)$$

En definitiva, (6.31) proporciona la estructura óptima de la base o imágenes elementales a usar en la representación de una matriz cualquiera, con la garantía de que la representación por un desarrollo truncado retiene, en valor esperado, la mayor parte de la energía en la señal reconstruida o anti-transformada.

Es de destacar, que cuando el valor esperado se lleva a cabo con el promedio un número elevado de matrices los autovectores por la derecha y por la izquierda coinciden. Por esta razón (6.32) será la representación más habitual conservando el carácter óptimo en la mayor parte de las aplicaciones.

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\underline{U}}^H = \sum_{m,n=1}^N \phi_{nm} \cdot \underline{\underline{u}}_n \cdot \underline{\underline{u}}_m^H \quad (6.32)$$

Los coeficientes se obtendrían según (6.33).

$$\phi_{nm} = \text{Traza}(\underline{\underline{u}}_m \cdot \underline{\underline{u}}_n^H \cdot \underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{u}}_n^H \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{u}}_m \quad (6.33)$$

Un esquema de codificación transformada (Transform.-coding) seguiría el esquema de la Figura VI.12. Dado que se han de generar varias imágenes para promediar obtener la matriz de correlación de (6.31), la imagen original se descompone en subimágenes digamos que de 8x8 elementos. La representación de la imagen en el dominio transformado se obtiene con (6.32). A continuación, se eligen los coeficientes más significativos y se cuantifican de acuerdo a criterios de mínimo error y velocidad constante que se comentaran mas adelante. En el receptor, se implementa (6.32) con los coeficientes transmitidos.

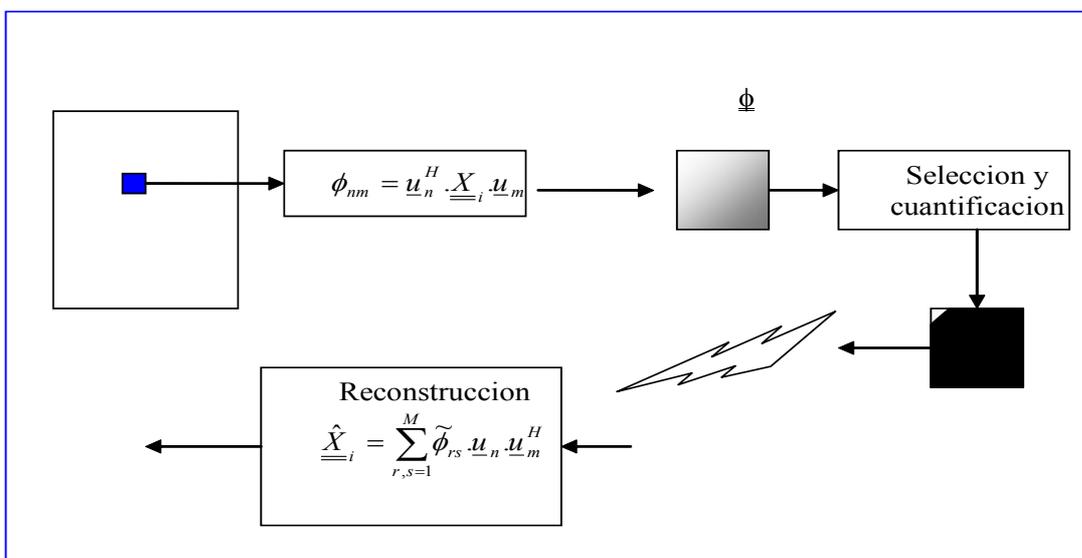
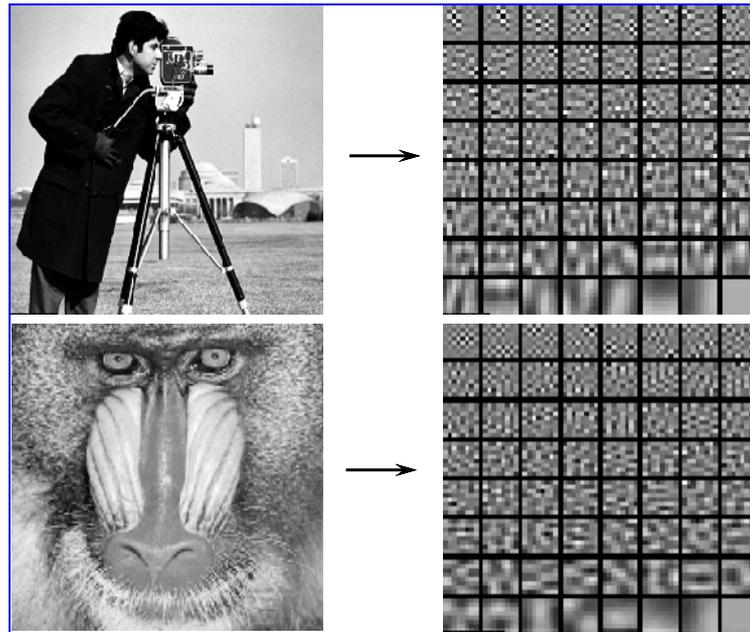


Figura VI.12. Esquema de un codificador de transformada.

El desarrollo expuesto presenta un carácter óptimo pero tiene el inconveniente de que las componentes de los autovectores no tienen estructura (no tienen porque ser ni exponenciales ni de aritmética finita) y, sobre todo, que esta transformación óptima depende de los datos. Es decir, formalmente cada imagen a codificar presentaría unos autovalores no muy diferentes si el tamaño de la subimagen es pequeño pero sí estrictamente diferentes.

La Figura VI.13, puede verse a la izquierda las dos imágenes originales y, a la derecha, las subimágenes  $\underline{A}_{pq}$  originadas por la descomposición en valores singulares, también denominada como transformación de Karhunen-Loewe, aunque bien debería denominarse tan solo transformada de Loewe haciendo honor a la excelente matemática que se vio, poco menos que, obligada a compartir su descubrimiento.



**Figura VI.13. Subimágenes obtenidas por la versión de la descomposición en valores singulares o transformada de Loewe.**

La idea de usar una sola base, común para todas las imágenes a representar es atractiva pero, también lo es y más, el que las componentes de los vectores tengan una estructura. Mas adelante se describirá esta transformación.

#### VI.7. SVD Y CUANTIFICACION.

En el apartado anterior se examinó, de una manera formal, que la mejor transformación, en términos de menor error por supresión de muestras en el dominio transformado era la transformación de Loewe, también conocida por ser la descomposición en valores singulares de la matriz de correlación de los datos.

En este apartado, mas próximo al diseño de codificadores por transformada, se probará su carácter óptimo cuando se somete a cuantificación, en un número finito de bits, en el dominio transformado, comparando la calidad con el caso de no emplear transformación óptima. Para ello se describirá brevemente aspectos necesarios relativos a la cuantificación uniforme de las componentes de un vector.

Suponiendo un vector de datos  $\underline{X}$ , con matriz de correlación  $\underline{R}$ , si la potencia de cada una de las  $Q$  componentes del vector se designa como  $r(q)$  ( $q=1, Q$ ), que a su vez son los valores de la diagonal de la matriz de correlación, cuando se somete cada una de las componentes a una cuantificación con  $b_q$  bits, el error de cuantificación en cada componente obedece a la expresión (6.34).

$$\sigma^2(q) = \frac{r(q)}{2^{2b_q}} \quad (6.34)$$

A su vez, la matriz de covarianza del error cometido al cuantificar todas las componentes del vector sería (6.35)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{X} - \underline{X}^Q \quad \underline{\underline{E}} = E(\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^T) \quad E_{ii} = \sigma^2(i) \quad (6.35)$$

A la hora del diseño de un codificador, existen dos criterios básicos. El primero es minimizar la traza de la covarianza del error, sujeto a que el número total de bits empleado es un número, digamos B; y el segundo, fijado el valor de la traza de la matriz del error, minimizar el número total de bits empleados. Dado que ambos tienen una gran similitud, se resolverá el primero.

La formulación de mínimo error para una tasa de transmisión fija sería según se indica en (6.36), donde se ha añadido la restricción obvia de que el número de bits asignado ha de ser positivo.

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^Q \sigma^2(q) \Big|_{\min} \quad \text{sujeto a} \\ & \sum_{q=1}^Q b_q = B \quad \text{y} \quad b_q \geq 0; \forall q=1, Q \end{aligned} \quad (6.36)$$

Asumiendo que el número de bits no ha de ser entero en el problema de minimización, la derivada del Lagrangiano igualada a cero proporciona la solución al problema anterior como se indica en (6.37), donde  $\mu$  es el multiplicador de Lagrange.

$$\frac{r(q)}{2^{2b_q}} = \mu \quad (6.37)$$

Esta solución revela que el óptimo se encuentra cuando todos los errores son iguales. Es fácil comprobar que esta solución coincide con la min-max de los errores de cuantificación que garantiza que se minimiza el error máximo cometido.

Prosiguiendo con la solución es fácil llegar a las expresiones del número de bits óptimo para cada componente (6.38)

$$\begin{aligned} 2b_q &= \frac{B}{Q} - \log_2 \left[ \frac{G}{r(q)} \right] \\ G &= \begin{matrix} \text{media} \\ \text{geométrica} \\ \text{de las potencias} \\ \text{de cada componente} \end{matrix} = \left( \prod_{p=1}^Q r(p) \right)^{1/Q} \end{aligned} \quad (6.38)$$

A su vez, el error mínimo o, mejor dicho, la traza de la covarianza del error mínima sería (6.39).

$$\xi_{\min} = \text{Traza} \left[ \underline{\underline{E}} \right]_{\min} = Q \cdot 2^{\left( \log_2(G) - \left( \frac{B}{Q} \right) \right)} \quad (6.39)$$

La solución (6.38) se entiende que ha de considerarse el número de bits cuando este sea positivo. Si alguna de las componentes resulta negativa se han de asignar la fracción sobrante al resto de

componentes que tienen una solución positiva. El algoritmo correspondiente no es complicado y no es materia del contenido de este curso.

En el caso de tomar el problema opuesto, fijar el error y minimizar B, la solución (6.38) es la misma y la expresión de la tasa de transmisión mínima es (6.40).

$$2.B_{\min} = \log_2 G - Q \cdot \log_2 \left( \frac{\xi}{Q} \right) \quad (6.40)$$

Llegado este punto es claro que los datos preferidos, los mejores para beneficiarse de ellos en el diseño de la cuantificación es aquellos en los que la media geométrica de sus potencias es mínima. Si se denomina como  $\underline{A}$  la matriz de transformación, nótese que la matriz de correlación pasa a ser la que se describe en (6.41).

$$\underline{X}_T = \underline{A} \cdot \underline{X} \Rightarrow \underline{R}_T = \underline{A} \cdot \underline{R} \cdot \underline{A}^H \quad (6.41)$$

El objetivo de diseño de esta transformación es obvio, se trata de que en la matriz de correlación la media geométrica de los elementos de su diagonal sea menor que la misma función en la matriz original. La solución a este problema es sencilla si se tiene en cuenta (6.42). Esta propiedad se lee como que, para cualquier matriz definida positiva, el producto de los elementos de su diagonal es siempre mayor o igual que su determinante.

$$b_{ii} = \text{elemento } ii \text{ de una matriz (definida positiva) } \underline{B}$$

$$\text{siempre se verifica que } \prod_{i=1}^Q b_{ii} \geq \det(\underline{B}) \quad (6.42)$$

Esta relación se verifica con igualdad cuando la matriz es diagonal. Así pues, la transformación óptima es la que diagonaliza la matriz de correlación. Esto prueba, de nuevo, que incluso para operaciones no lineales la transformación de Loewe es óptima.

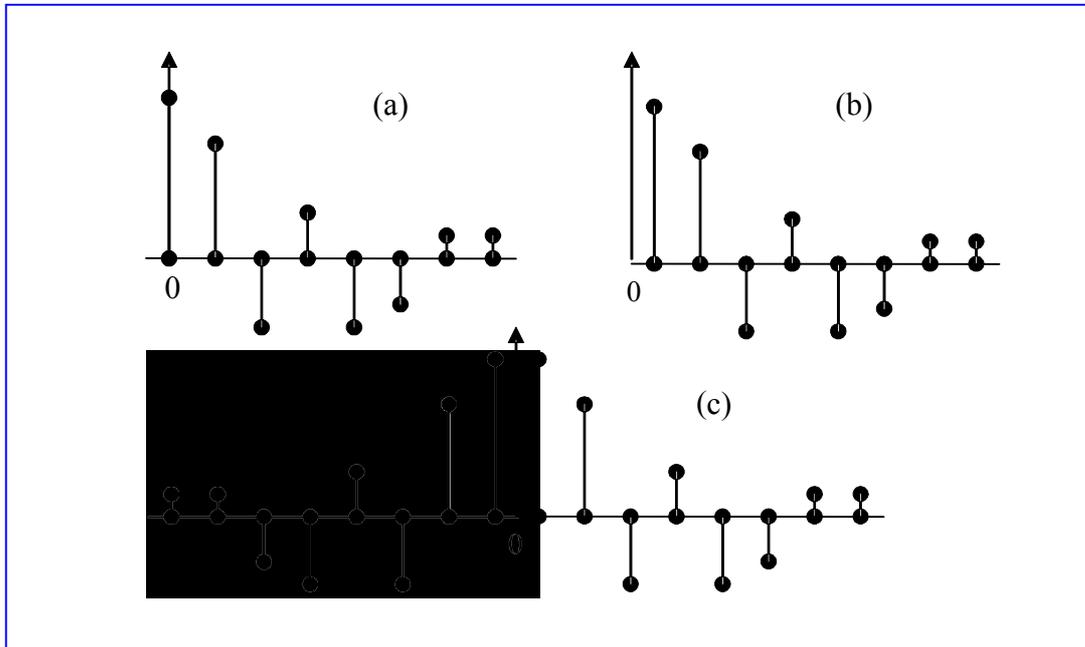
Las excelencias de svd chocan con la complejidad que conlleva que sea una transformación dependiente de los datos. El siguiente apartado describe una transformación, independiente de los datos que trabaja tremendamente próxima en calidad a svd. Esta transformada, en su versión directa (JPEG), en su versión diferencial (MPEG), o combinando predicción lineal y sistemas de predicción de movimiento es la base de todos los estándares de codificación de imagen como LPC lo es para voz.

## VI.8. LA TRANSFORMADA COSENO O DCT.

La transformación más popular e independiente de los datos es claramente la transformada de Fourier. Versiones de aritmética finita en lugar de exponenciales, como las transformadas de Walsh y Hadamard, usadas en sistemas de diversidad temporal o spreading para sistemas de comunicaciones, carecen de un equivalente al teorema de Parseval por lo que su robustez a la truncación es inferior siempre a Fourier, en la versión que veremos en el presente apartado. Ha de entenderse la mención al teorema de Parseval en su versión de minimización del producto de duraciones efectivas, original y dominio transformado, de valor mínimo. De otro modo, la preservación de la energía la cumple cualquier base ortonormal como las funciones de Walsh-Hadamard. Muchos autores, sin aludir a Parseval, se refieren a las propiedades de compactación de energía en el dominio transformado

Concentrándose en la transformada de Fourier, esta es de carácter genérico en el sentido de que es una representación válida para el caso de señales complejas. En el caso de señales reales no es prudente su uso ya que es redundante. Basta pensar que para N muestras reales se requieren N valores reales y N valores complejos. Lo cierto es que la redundancia de la transformada de Fourier para señales reales es obvia ya que la región de frecuencias negativas es Hermitica con respecto a la de frecuencias positivas. La cuestión es si no sería posible pasar de N valores reales a N coeficientes reales sin tener que recurrir a la paridad e imparidad de módulo y fase respectivamente. La solución es bien conocida en cursos básicos de procesamiento de señal y es que una señal real puede recuperarse exclusivamente de la parte real de su transformada de Fourier. Lo que sigue explotará este principio para el caso de una señal muestreada.

La Figura VI.14 presenta la señal muestreada originalmente en (a). Esta señal se considera causal sin pérdida de generalidad. Es bien conocido que la transformada de Fourier de una señal par es real, así pues, con el fin de convertir la señal original en par se desplaza la original medio periodo de muestreo hacia la derecha como se indica en la misma figura en (b).



**Figura VI.14. Señal muestreada causal original de 8 muestras en (a). Señal desplazada medio periodo de muestreo en (b). En (c) señal par cuya parte causal contiene directamente la información de la señal original.**

En consecuencia, si la secuencia original se denomina como  $x(n)$  y el periodo de muestreo original como  $T$ , la transformada de Fourier de la señal (c) sería según sigue:

$$dc(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot 2 \cdot \cos(2\pi(2n+1) \cdot f \cdot T / 2) \quad (6.43)$$

Salvando de momento el valor en el origen, ahora el proceso sería discretizar  $dc(f)$  con la condición de que la repetición en el tiempo no provocara aliasing. Dado que la duración de la señal es  $4NT/2$ , su inversa determina el periodo de muestreo más lento posible en frecuencia. De este modo se obtiene (6.44).

$$dc(k) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \cos(\pi(2n+1) \cdot k / 2N) \quad (6.44)$$

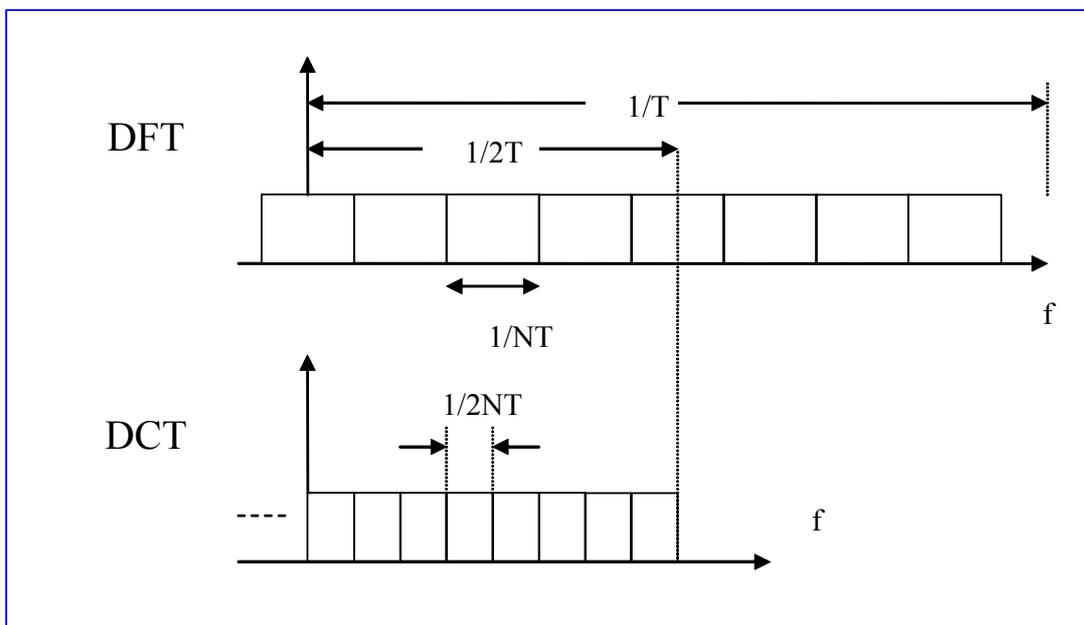
Con el fin de asegurar que la transformada directa e inversa son exactamente la misma expresión, se incluye la constante  $N^{-1/2}$  tanto en la directa como en la inversa. Asimismo, como la transformada quedaría con muestra en el origen  $dc(0)$  y, al hacerla par, habría que dividirla por dos, la transformada directa ya lleva suprimido el 2 en el cálculo de la  $dc(0)$ . En definitiva, se llega a (6.45), la transformada absolutamente adaptada a señales reales y de uso obligado en codificación transformada, no solo en 2D, sino para cualquier señal audio o video.

$$DCT_x(k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2} & k = 0 \\ \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot (2n+1) \cdot k}{2N}\right) & k = 1, N-1 \end{cases} \quad (6.45)$$

Antes de proseguir, nótese que la DCT tiene una relación con la DFT derivada fácilmente de la Figura VI.13 y que puede verse en (6.46), donde el subíndice “zp” indica rellenado con ceros al doble de la longitud.

$$dc(w) = \text{Real}(DFT[x(n)]_{zp} \cdot \exp(-jwT/2)) \quad (6.46)$$

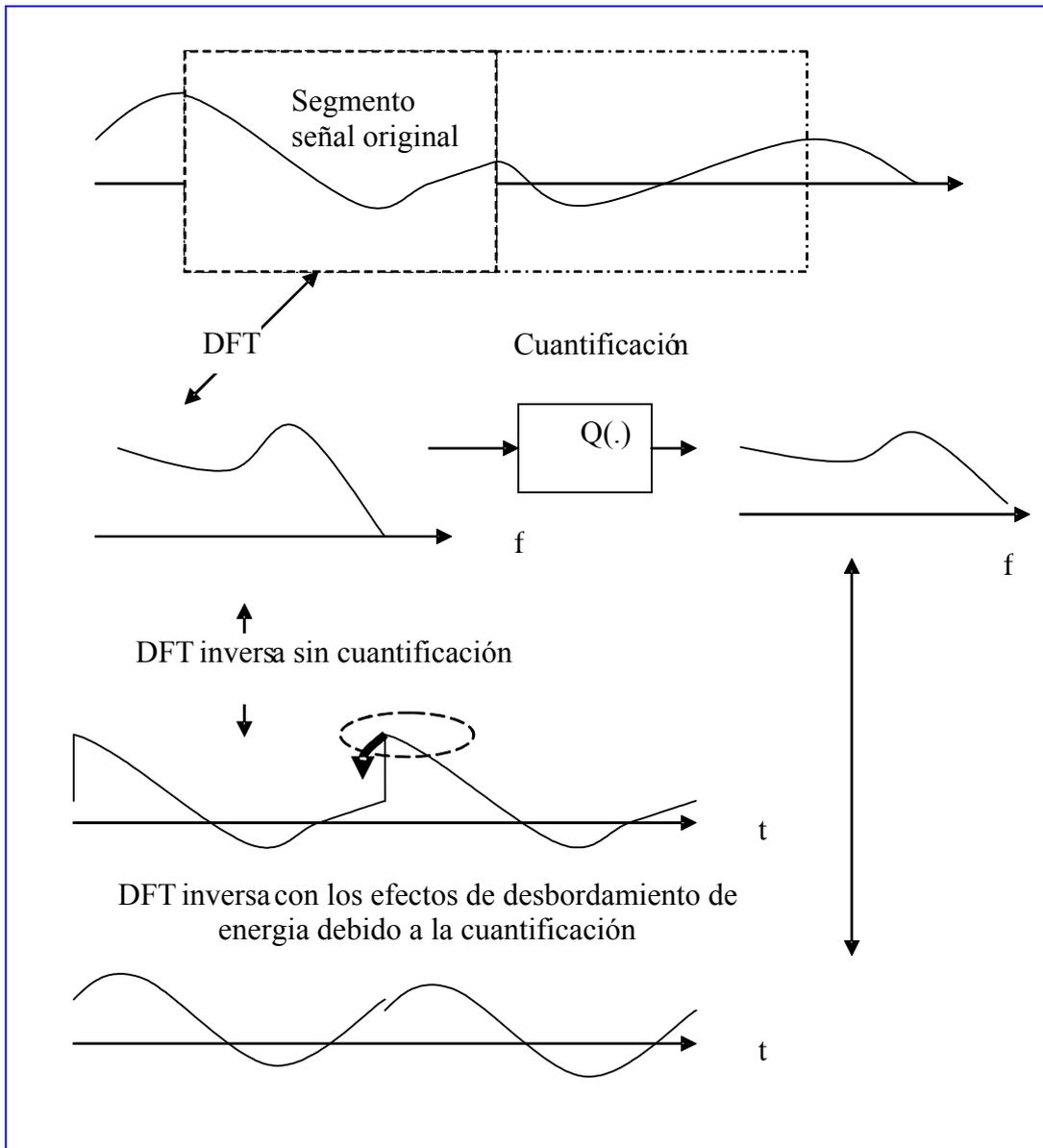
Revisando las ventajas que presenta la DCT versus la DFT, la primera es su baja complejidad y que, como transformada de Fourier, mantiene la ortogonalidad de sus funciones. En segundo lugar, nótese que, interpretando como filtros, al igual que para la DFT, la DCT presenta una resolución doble, salvo en el coeficiente de cero, que la DFT. La situación se representa en la Figura VI.15.



**Figura VI.15. Banco de filtros equivalente para DFT (complejos) y DCT (reales) mostrando la doble resolución que presenta la DCT en el correspondiente detalle frecuencial.**

En cualquier caso, y aplicado por primera vez en vocoders, la propiedad que marca la diferencia entre la DCT y otras transformadas proviene de la no-linealidad que un proceso de cuantificación, o representación en aritmética finita de sus coeficientes, provoca en la transformada inversa. Es bien conocido que una operación no-lineal amplía la duración en el dominio contrario. Esta ampliación del soporte en el dominio opuesto es proporcional a la magnitud o energía de la zona afectada. En el caso de la DFT, como es conocido, esta implícita la periodificación cada N muestras, por esta razón, al someter la DFT a cuantificación, se produce un “desborde” de energía que afecta como puede verse en la figura siguiente (Figura VI.16). Claramente al reconstruir la señal previamente segmentada la señal reconstruida sufre una distorsión severa.

Este efecto de distorsión está agravado cuando la señal presenta en un extremo una energía elevada y en el final muy baja, o viceversa, puesto que gran parte de la energía del principio pasa desbordada al final del segmento.

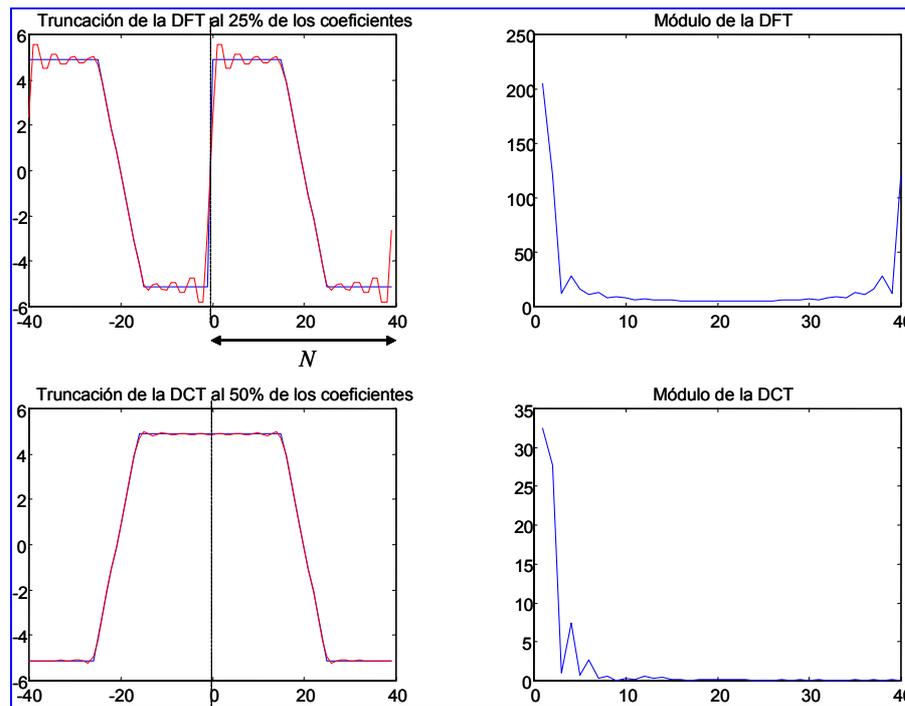


**Figura VI.16. Efectos de la cuantificación mostrando que el segmento de N muestras original sufre desbordamiento debido a la periodificación implícita en la DFT.**

El efecto anterior, de desbordamiento, que también tiene lugar en la DFT es menos perceptible ya que su periodicidad es de  $2N$  y de carácter par. En otras palabras, nunca en la señal periodificada están próximas una zona de alta y otra de baja energía.

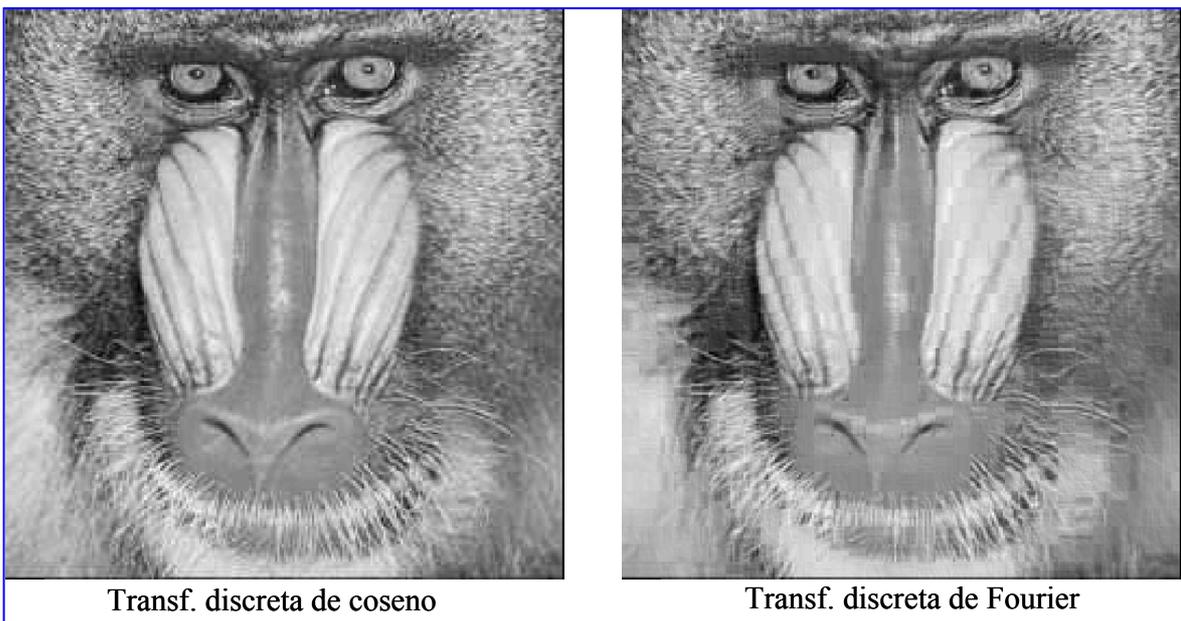
Esta propiedad de la DCT sobre la DFT es la que, en la segmentación de una imagen, la reconstrucción a partir de los segmentos cuantificados en el dominio transformado no presente residuos apreciables en el caso de la DCT y sumamente perceptibles en el caso de la DFT. Esta fundamentalmente y no otras son las razones del éxito de la DCT en codificadores transformados.

En la Figura VI.17 se muestra como la truncación en el dominio transformado provoca un pésimo ajuste en los bordes por desbordamiento de energía en la DFT, y como el fenómeno se corrige en la DCT.



**Figura VI.17. Efecto de truncar los coeficientes en la DFT (arriba) y en la DCT (abajo).**

Los efectos que el desbordamiento supone, al reducir el número de coeficientes en el dominio transformado o cuando estos se cuantifican, pueden apreciarse en la Figura VI.18. De nuevo la DCT muestra su superioridad para su uso con señales reales.



**Figura VI.18. Reconstrucción imagen con DCT y DFT. En ambos casos se retuvieron los 32 coeficientes mas importante o de mayor potencia. Cada subimagen fue de 8x8.**

Además de todo lo anterior, como se ha podido ver en el apartado anterior, la transformación óptima o SVD estaba formada por los autovectores de la matriz de correlación. Veamos el comportamiento asintótico de esta descomposición.

La ecuación en la que se centra el interés es (6.47) donde  $\underline{C}$  es una matriz de covarianza,  $\underline{u}_q$  es el autovector y  $\lambda_q$  es el autovalor correspondiente.

$$\underline{\underline{C}} \underline{u}_q = \lambda_q \underline{u}_q \quad (6.47)$$

Cada una de las componentes del autovector se puede expresar como (6.48).

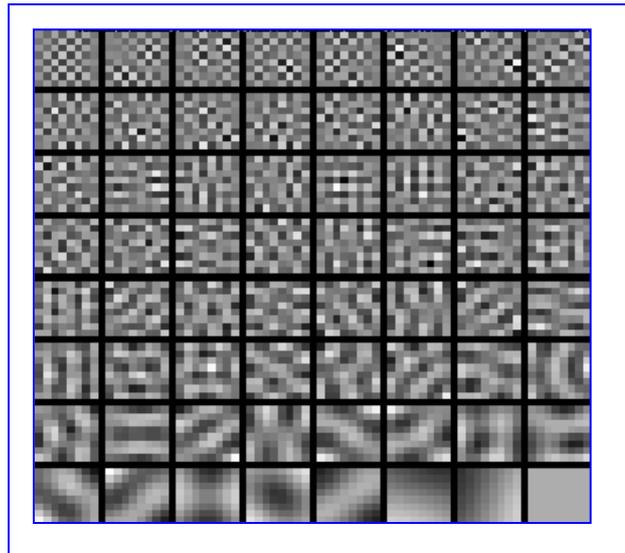
$$\sum_{m=0}^{N-1} u_q(m) \cdot c(n-m) = \lambda_q \cdot u_q(n) \quad ; \quad n = 0, N-1 \quad (6.48)$$

$$\sum_{m=-n}^{N-1-n} c(|m|) \cdot u_q(n-m) = \lambda_q \cdot u_q(n)$$

Más fácil en la segunda ecuación, puede verse que para N muy grande y valores acordes del índice n, el sumatorio se extiende prácticamente de menos a más infinito. En esta situación es fácil comprobar que  $\exp(jwn)$  es una auto función y la transformada de Fourier de la función de autocorrelación el autovalor. Además, si se suprime el valor absoluto en el índice de la correlación, es inmediato comprobar que se trata de una transformada coseno, siempre claro que la autocorrelación sea real. De hecho la ecuación (6.49) es bien conocida por el lector y asimilable a lo expuesto.

$$\int_0^{\infty} r_x(\tau) \cdot \cos(w(t-\tau)) \cdot dt = S_x(w) \text{Cos}(wt) \quad (6.49)$$

En la Figura VI.19 pueden verse las funciones base de la DCT y apreciar su similitud con los de la transformación óptima.



**Figura VI.19. Subimágenes 8x8 de la DCT (A compara con las subimágenes  $\underline{\underline{A}}_{pq}$  de la figura VI.13.**

La Figura VI.20, procedente de “dctdemo” de Matlab™ constituye un ejemplo de la elevada redundancia de una imagen y la eficiencia de la DCT en suprimirla centrandó su contenido alrededor del origen. La imagen original se segmenta en bloques de 8x8 muestras que son transformados. En dicha figura puede verse que conservando tan solo la mitad de coeficientes el error entre ambas es imperceptible y, por supuesto carece del residuo debido a la segmentación.

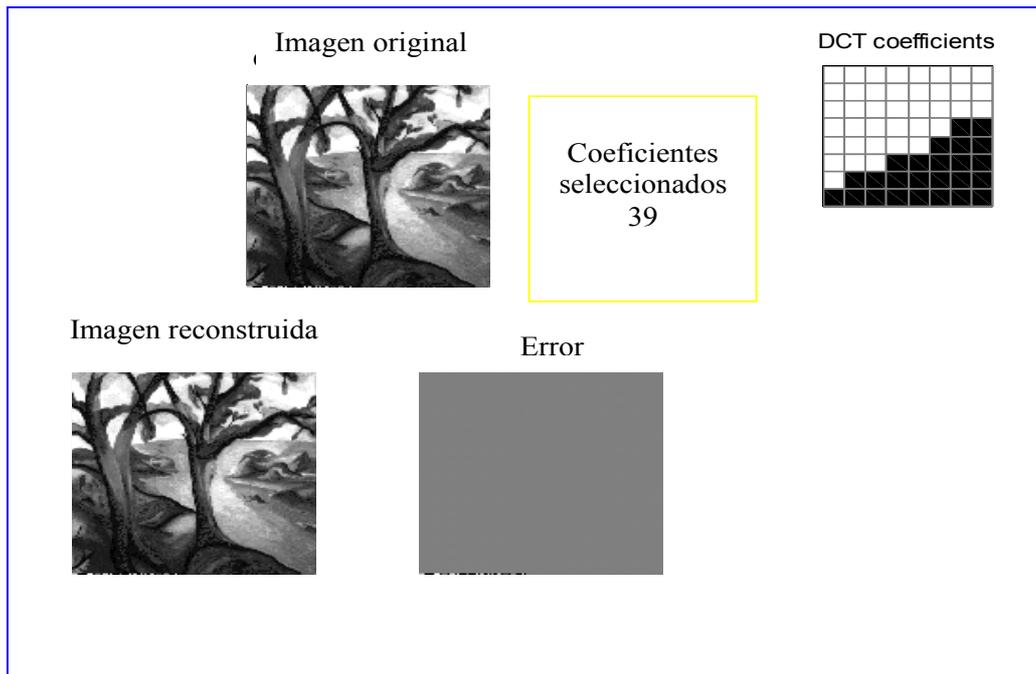


Figura VI.20. Robustez de la DCT a la truncación. Extraída de “dctdemo” de Matlab™

Por último, en la figura VI.21 se muestra una reducción mucho más significativa, de los sesenta y cuatro coeficientes de cada subimagen tan solo se preservan 8 coeficientes. Es interesante destacar, como se muestra en la máscara de la derecha lo que se denomina selección zonal. Esta selección indica donde se encuentran los coeficientes más significativos y como puede verse es asimilable a una exploración en zig-zag de la original hasta el número de coeficientes seleccionado. También en el error pueden apreciarse los contornos o contenido de alta frecuencia que ya no es retenido a estos niveles de reducción.

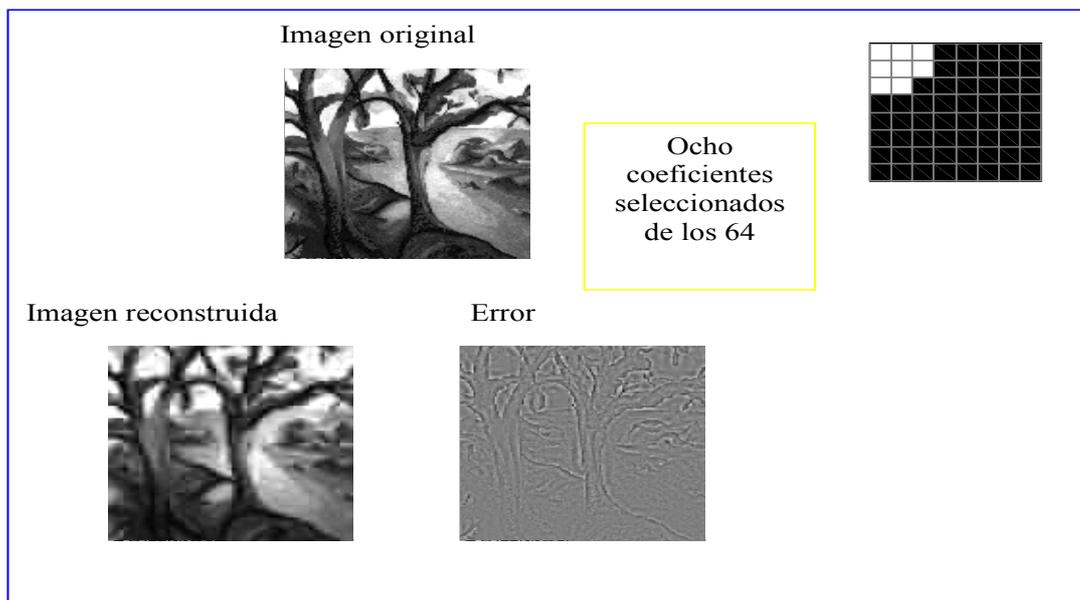


Figura VI.21. Igual que la figura anterior pero para el caso de 8 coeficientes de los 64. “Dctdemo” Matlab™

## VI.9. EJERCICIOS.

**VI.8.1.-** This problem evaluates the performance of coding transform methods and its degradation with respect the KL transform. The proposed transformation is given by:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

In order to find out the performance loss we have to take in mind the following:

- The coder will use uniform quantization for the transform coefficient
- The signal vector to be coded  $\underline{x} = [x_1 \ x_2]^T$  is zero mean and

$$\text{covariance } \underline{\underline{C}}_x = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \text{ with } 0 \leq \rho \leq 1$$

- a.- Determine the transformation  $\underline{\underline{B}}$  from the given matrix  $\underline{\underline{A}}$ .
- b.- Which is the transformation matrix for the KL?

The comparison will be in terms of error for a given number of bits.

- c.- Using K bits, compare the use of  $\underline{\underline{B}}$  and the KL.
- d.- Which would be the error power when using K bits to quantify the signal vector?

Now we are going to compare both methods in terms of required number of bits for a given error power

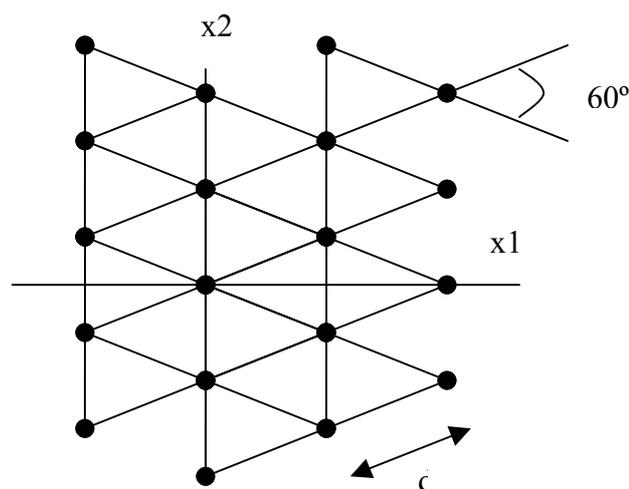
e.- Assuming that the error over the coded signal is D, find out the number of bits required for each of the transforms.

f.- Compute the number of bits needed, to preserve the same error power D, when  $\underline{x}$  is quantified directly

g.- Which is the impact of  $\rho$  in the results obtained previously.

**VI.8.2.-** Dada una imagen  $i(x_1, x_2)$ , abreviadamente  $i(\underline{x})$ , con un soporte rectangular definido por  $|x_1| < 10$  y  $|x_2| < 10$  y con transformada de Fourier  $I(w_1, w_2)$ , abreviadamente  $I(\underline{w})$ , de soporte circular,

es decir,  $\sqrt{w_1^2 + w_2^2} < 1$ , se pretende discretizar usando un muestreo hexagonal centrado como el que muestra la figura siguiente:



- a) ¿Cual es la expresión de la matriz de muestreo  $\underline{\underline{U}}$ ?
- b) Determine el valor máximo de la distancia  $d$  que permite la recuperación de la imagen original a partir de su versión muestreada.

- c) Compare el valor de la distancia  $d$  del apartado anterior con el que requeriría, en el caso de haber empleado muestreo rectangular. Razone cual de los dos le parece mas adecuado.

Se tomara en lo que sigue el valor  $d=0.5$

- d) Determine la matriz de muestreo en frecuencia de modo y manera que no se produzca solapamiento en el dominio original.
- e) Con las selecciones anteriores, escriba la expresión de la DFT de la imagen muestreada.

**VI.8.3.-** Dada una imagen de tamaño  $(Q, Q)$  e igual a  $\underline{\underline{X}}_n$ , se procede a representar esta por  $Q$  imágenes de rango uno formadas según sigue:

$$\underline{\underline{X}}_n = \sum_{r=1}^Q \varphi_n(r) \cdot [\underline{u}_{r,n} \cdot \underline{v}_{r,n}^H]$$

Donde los vectores  $\underline{u}$  son ortonormales entre si, al igual que los  $\underline{v}$  entre si.

- a.- Comente las ventajas y dificultades de emplear esta representación para la transmisión de la imagen original.

Una alternativa diferente, seria usar la siguiente representación, también formada con vectores ortonormales:

$$\underline{\underline{X}}_n = \sum_{s=1}^Q \sum_{r=1}^Q \varphi_n(s, r) \cdot [\underline{u}_s \cdot \underline{u}_r^H]$$

- b.- Indique las ventajas y/o los inconvenientes de emplear esta segunda transformación en vez de la primera.

Considerando una columna de la imagen original  $\underline{X}_n$ , de media nula y covarianza  $\underline{\underline{R}}$  (potencia igual  $\text{Traza}(\underline{\underline{R}})$ ), en un proceso de cuantificación es claro que la política optima es asignar menos bits a los vectores de mayor probabilidad, es decir:

$$\text{Bits para } \underline{X}_n \propto -\text{Ln}(\text{Pr}(\underline{X}_n))$$

Asumiendo esta regla, el número de bits promedio, necesarios para la transmisión de los vectores vendría dado por:

$$B \propto -\int \text{Pr}(\underline{X}_n) \cdot \text{Ln}(\text{Pr}(\underline{X}_n)) \cdot d\underline{X}_n \propto \det(\underline{\underline{R}}) + Q$$

- c.- Considerando fijada la potencia de cada componente y sabiendo que el determinante de una matriz de correlación es siempre menor o igual que el producto de los elementos de su diagonal, muestre que  $B$  es máximo cuando las componentes del vector están incorreladas.

Fijada la matriz de correlación y una vez obtenido  $B$ , la codificación conjunta de los vectores es complicada y seria deseable poderla realizar independientemente para cada

componente. Con el fin de poder codificar cada componente independientemente, se aplicara una transformación a los vectores originales  $\underline{Y}_n = \underline{U} \cdot \underline{X}_n$

d.- Demuestre que condición ha de cumplir la transformación para no modificar la potencia de los vectores transformados, es decir, se ha de cumplir que

$$\text{Traza}(\underline{R}_{\underline{y}}) = \text{Traza}(\underline{R}_{\underline{x}})$$

e.- Indique ahora como se encuentra la matriz de transformación que permite codificar cada componente por separado. Compruebe que el determinante de la matriz de correlación de los datos transformados es el mismo que los originales, es decir, no se incrementa el número de bits necesarios para su codificación por componentes, con respecto a la codificación conjunta de los vectores originales.

f.- Cuales son las similitudes y diferencias de la DFT con las transformación anterior y porque se prefiere el uso de la DCT al de la DFT en procesado de imagen.

#### VI.8.4.

Dada una señal bi-dimensional  $f(\underline{x})$ , con  $\underline{x} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$ , que solo existe para

$|x1| \leq D$   $|x2| \leq D$  y cuya transformada de Fourier  $F(\underline{w})$ , con  $\underline{w} = \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \end{bmatrix}$ , tiene una

densidad espectral que ocupa la zona  $w1^2 + w2^2 \leq B^2$ , responda a las siguientes preguntas:

a.- Deduzca la matriz de muestreo rectangular  $\underline{U}_R$  que permite obtener la señal discreta  $f(\underline{n})$ , con  $\underline{n} = \begin{bmatrix} n1 \\ n2 \end{bmatrix}$ , a partir de  $f(\underline{x})$  y sin que exista “aliasing” o solapamiento en el dominio frecuencial.

b.- Repita el apartado anterior para el caso en que se emplee muestreo hexagonal con la siguiente matriz de muestreo  $\underline{U}_H = d \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ , encontrando el valor de d en función de B.

c.- ¿Cual de los dos métodos de muestreo, descritos en los apartados anteriores es mejor? Justifique la respuesta.

d.- Tomando el caso de muestreo rectangular y siendo  $F_d(\underline{w})$  la transformada de Fourier de  $f(\underline{n})$ , calcule la matriz de muestreo en frecuencia,  $\underline{w} \rightarrow \underline{\Phi} \cdot \underline{m}$ , tal que no se produzca “aliasing” o solapamiento en el dominio temporal.

De hecho, la relación entre  $F_d(\underline{m})$  y  $f(\underline{n})$  es la DFT es su versión bidimensional.

$$f(\underline{n}) = \frac{1}{\det(\underline{N})} \cdot \sum_{\underline{m}} F_d(\underline{m}) \cdot \exp[2\pi j(\underline{n}^T \cdot \underline{N}^{-T} \cdot \underline{m})] = IDFT(F_d)$$

$$F_d(\underline{m}) = \sum_{\underline{n}} f(\underline{n}) \cdot \exp[-2\pi j(\underline{m}^T \cdot \underline{N}^{-1} \cdot \underline{n})] = DFT(f)$$

e.- Indique las razones que motivan el uso de la transformada coseno en lugar de la DFT en procesamiento de imagen.

#### VI.10 REFERENCIAS.

[1]