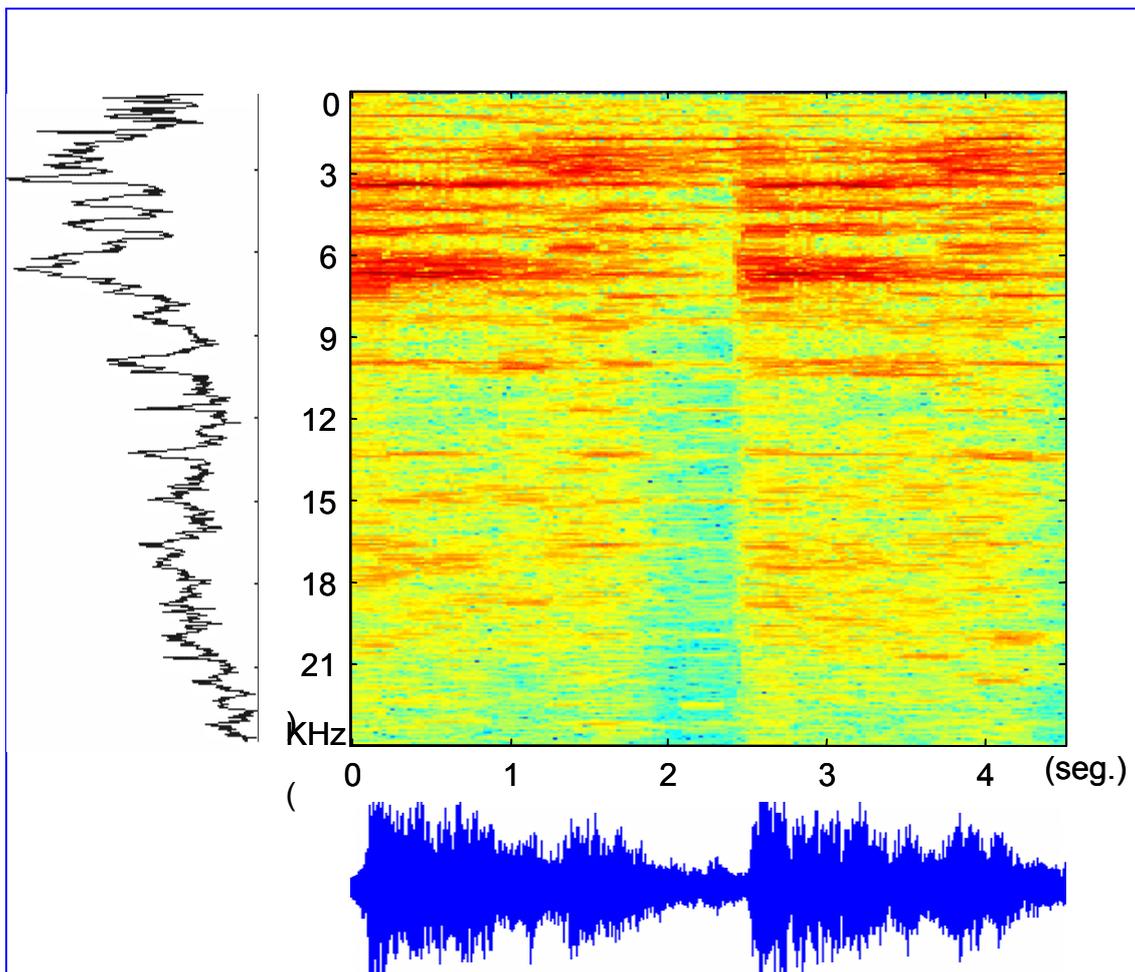


# Capitulo III

## ESTIMACION ESPECTRAL



- III.1. EL ESTIMADOR DE CORRELACIÓN
- III.2. TRANSFORMACIONES Y VENTANAS.
- III.3. ESTIMACION CON MULTIPLES VENTANAS.
- III.4. LA VARIANZA DEL PERIODOGRAMA.
- III.5. BANCO DE FILTROS Y ANALISIS ESPECTRAL
- III.6. ESTIMACION ESPECTRAL DE MINIMA VARIANZA (MLM).
- III.7. METODOS VARIACIONALES Y ESTIMACION ESPECTRAL PARAMÉTRICA.
  - III.7.1. ESTIMACIÓN ARMA: METODO DE DURBIN.
  - III.7.2. ESTIMACIÓN ARMA: LAST
- III.8. DETECTORES DE FRECUENCIA: MUSIC
- III.9. AUTOVECTORES, AUTOVALORES Y DENSIDAD ESPECTRAL
- III.10. CONCLUSIONES
- III.11. EJERCICIOS
- III.12. REFERENCIAS

### III.1 EL ESTIMADOR DE CORRELACIÓN

Se empezará por revisar lo comentado en el tema anterior sobre el estimador de correlación. Como ya se insistió, es fundamental determinar de qué forma se estima la matriz de correlación y no la función, es la estructura de la matriz la que configura el espectro de potencia o su estimación y sobre esta función esta la única restricción que la función de autocorrelación tiene, su transformada de Fourier (la densidad espectral) ha de ser positiva. Es por esta razón que el apartado desarrolla con más esmero la estimación de la matriz que el de la función en sí, que será un resultado lateral. Supóngase que se dispone de la autocorrelación exacta, es decir, las entradas de la matriz son la acf (función de autocorrelación correcta). Una vez se ha decidido el tamaño de la matriz y estando ésta disponible, el valor exacto y el estimador, por decirlo de algún modo, más natural de la densidad espectral vienen dados por:

$$S(\omega) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{\underline{S}^H \underline{S}} \underline{S}^H \underline{R} \underline{S} = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{Q} \underline{S}^H \underline{R} \underline{S} \quad (\text{III.1})$$

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{Q} \underline{S}^H \underline{R} \underline{S}$$

Donde el vector  $\underline{S}$  es el expresado en (III.2),  $Q$  es el orden de la matriz de correlación, y  $\underline{R}$  es la matriz con los valores de la autocorrelación del proceso y, obviamente, es de tamaño  $Q \times Q$ . Nótese que  $S(\omega)$  no es la densidad espectral correcta sino un estimador. Para que la densidad espectral fuese la correcta la  $Q$ , el orden de la matriz, debería de tender a infinito.

$$\underline{S}^H = [1 \quad \exp(-j\omega) \quad \cdots \quad \exp(-j\omega(Q-1))] \quad (\text{III.2})$$

Para evidenciar de nuevo la importancia de la formulación anterior en lo que se refiere al estimador de correlación y de la matriz, se escribirá otra vez la expresión del estimador espectral para el caso de elegir un orden 3, es decir  $Q$  igual a 3:

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= [1 \quad \exp(-j\omega) \quad \exp(-j2\omega)] \begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & r(-2) \\ r(1) & r(0) & r(-1) \\ r(2) & r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\omega) \\ \exp(j2\omega) \end{bmatrix} / 3 = \\ &= [1 \quad \exp(-j\omega) \quad \exp(-j2\omega)] \begin{bmatrix} r(0) + r(-1)\exp(j\omega) + r(-2)\exp(j2\omega) \\ r(1) + r(0)\exp(j\omega) + r(-1)\exp(j2\omega) \\ r(2) + r(1)\exp(j\omega) + r(0)\exp(j2\omega) \end{bmatrix} / 3 = \\ &= \frac{1}{3} r(-2)\exp(2j\omega) + \frac{2}{3} r(-1)\exp(j\omega) + r(0) + \frac{2}{3} r(1)\exp(-j\omega) + \frac{1}{3} r(2)\exp(-2j\omega) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Como puede verse, el estimador construido de este modo, es la transformada de Fourier de la autocorrelación pero con sus valores multiplicados por la función (III.4)

$$w_l(n) = 1 - \frac{|n|}{Q} \quad (\text{III.4})$$

La conclusión es que cuando el orden es finito el estimador requiere de la función (III.4) para que su transformada de Fourier sea positiva. Este termino desaparece cuando el orden  $Q$  es muy grande, pero para órdenes finitos no. Nótese pues que aunque se disponga de la autocorrelación exacta, si no se conoce en toda su extensión se ha de utilizar (III.4). En el fondo la cuestión es que estimar la densidad espectral nos enfrenta a dos problemas: Por una lado existen los problemas derivados de estimar la correlación; En segundo lugar, esta el problema de que en general no se conocerá en toda su extensión, es decir el estimador tan solo estará disponible en un numero finito  $Q$  de lags. Nótese que, como se

menciona en el apartado anterior, si se dispone de N muestras de señal no es prudente emplear más de N/3 para elegir Q.

En lo expuesto anteriormente y partiendo que el objetivo es estimar la matriz de correlación, es claro que se emplearía un estimador insesgado. Lo que es sorprendente es que usando el insesgado para la matriz, la función de autocorrelación, aquella cuya transformada de Fourier es el estimador de densidad espectral esta afectada de (III.4), es decir, es el sesgado. Esta es la mejor conclusión del apartado, para estimar la matriz usar el insesgado pero si se desea la función usar el sesgado.

En definitiva, el estimador (III.1), o su versión en (III.3) conlleva el ‘eventanar’ la función de autocorrelación con una ventana de duración 2Q-1 muestras, parte positiva y negativa más el lag cero, cuya ponderación decrece a medida que se acerca al borde de este marco de observación. Es decir, se producen dos fenómenos simultáneamente, sobre los que se vuelve a insistir por su importancia: Por un lado se trunca la observación de la autocorrelación con una ventana rectangular y, por otro lado, la forma cuadrática del estimador lo eventana triangularmente (triángulo centrado en el origen).

En el siguiente apartado se describirá con más detalle el efecto de la ventana. En este momento, el interés es conocer un poco más de la estructura de este estimador del espectro.

Toda la estructura del estimador proviene de la manera en que se estima la matriz de autocorrelación usada en su expresión. Si se dispone de un segmento de N muestras, se puede formar el estimador con una matriz de rango uno. Dicha matriz se obtiene a base de disponer todos los datos en un vector  $\underline{X}_n$ :

$$\underline{\underline{R}} = \underline{X}_n \underline{X}_n^H \quad (III.5)$$

Obsérvese que, de nuevo, el estimador es insesgado ya que el valor esperado de esta matriz es la matriz de correlación exacta. Es importante destacar que el hecho de que la matriz sea un estimador insesgado no conlleva, como es fácil de comprobar, que el estimador espectral lo sea, de hecho no lo es. Si bien el cálculo de la varianza de la densidad espectral estimada queda aplazado hasta el apartado III.3, diremos que ésta es muy elevada. De todos modos, al introducirlo en la forma cuadrática que se tiene para el estimador correspondiente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= \frac{1}{\underline{S}^H \underline{S}} \underline{S}^H \underline{\underline{R}} \underline{S} = \frac{1}{\underline{S}^H \underline{S}} \underline{S}^H \underline{X}_n \underline{X}_n^H \underline{S} = \frac{1}{N} \left| \underline{S}^H \underline{X}_n \right|^2 = \\ &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-jn\omega) \right|^2 = \frac{1}{N} |DFT(x(n))|^2 \end{aligned} \quad (III.6)$$

Esta expresión revela una estructura computacionalmente eficiente: el estimador es básicamente el módulo al cuadrado de la DFT de la realización que se dispone del proceso bajo análisis. La segunda propiedad, que constituye la ventaja del estimador de correlación de varianza elevada, es que la resolución frecuencial será la correspondiente a una DFT de N puntos, es decir 1/NT Hz. En resumen, se está ante un estimador de resolución aceptable pero elevada varianza. Dado que el módulo al cuadrado de la DFT, dividido por su longitud, constituye en si un estimador, se le otorga un nombre propio que proviene de los primeros trabajos relativos a estimación espectral, simultáneos al desarrollo de la FFT. El nombre alude a un sistema que representa los ‘periodos’ fundamentales contenidos en los datos y su nombre el Periodograma.

Si se pretende reducir varianza del estimador anterior, se ha de recurrir a la ergodicidad y por tanto a segmentar la señal original de N muestras en segmentos de longitud Q. El número de segmentos sería N/Q igual a M. El estimador de la matriz de correlación y la densidad espectral pasarían a ser los siguientes:

$$\underline{\underline{R}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \underline{X}_m \underline{X}_m^H \quad (III.7.a)$$

Donde el subíndice m denota el comienzo del segmento como se indica en (III.7.b):

$$\underline{X}_m = [x(mQ) \quad x(mQ-1) \quad \cdots \quad x(mQ-Q+1)]^T \quad (\text{III.7.b})$$

Y el estimador espectral como (III.7.c):

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left| \underline{S}^H \underline{X}_m \right|^2 / Q \quad (\text{III.7.c})$$

Es decir, el nuevo estimador es el promedio de periodogramas de longitud Q, formados por el módulo al cuadrado del segmento correspondiente y dividido por su longitud. En este estimador, la varianza se ha reducido en un factor M, pero la resolución ha disminuido en el mismo factor, pasando a ser de 1/QT Hz.

Podría argumentarse que el número de segmentos puede aumentarse a base de solapar los segmentos seleccionados. Esto no es cierto pues la proclamada reducción de varianza requiere que los segmentos sean independientes. Dicho de otro modo, el estimador de (III.8):

$$S(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \left| \underline{S}^H \underline{X}_n \right|^2 / Q \quad (\text{III.8})$$

En el caso de que los segmentos difieran uno del siguiente en tan solo dos muestras, pierden la última y añaden la primera, tiene la misma varianza que (III.7.c). No obstante, y a pesar de tener la misma varianza y computacionalmente ser más costoso, por su formulación sencilla se usará a partir de ahora hasta la conclusión del tema. El lector deberá recordar que, desde el punto de vista práctico, el sesgo y la varianza del estimador no cambia si en vez de sumar de uno en uno se suma de Q en Q, siempre y cuando Q no supere el tiempo de coherencia del proceso, mas adelante se explicara este detalle; en cualquier caso recuerde que sin saber el tiempo de coherencia, y a riesgo de efectuar mas operaciones de las necesarias es mas seguro solapar al máximo los segmentos.

## III.2. TRANSFORMACIONES Y VENTANAS.

Ya se ha visto que el estimador de la densidad espectral de potencia conlleva un enventanado triangular de la función de correlación. Cabe preguntarse ¿Cuales serían los efectos en términos de sesgo y varianza sobre la densidad espectral estimada si se enventana el vector de señal?. Básicamente el enventanado podría contemplarse como una operación cosimétrica. Merece la pena insistir en la palabra cosimétrica, puesto que se persigue que el estimador se adapte mejor a lo 'se desea ver' y no necesariamente a que se ajuste a la densidad espectral correcta. El enventanado de los datos de la realización puede expresarse como una matriz. Si a esta matriz de transformación se la denomina como matriz  $\underline{W}$ , el nuevo estimador espectral pasaría a ser (III.9):

$$S(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \left| \underline{S}^H \underline{W} \underline{X}_n \right|^2 / Q \quad (\text{III.9})$$

Donde los datos transformados serían los originales sujetos a la transformación mencionada.

$$\underline{X}_n^t = \underline{W} \underline{X}_n \quad (\text{III.10})$$

En el caso de que esta matriz sea diagonal, puede verse que el efecto de la transformación es enventanar el segmento a procesar, con una ventana que serían los elementos de la diagonal. Es decir, en lugar de tomar la DFT del segmento de Q valores de los datos, se estaría tomando la DFT de los datos multiplicados por la ventana  $w_d(n)$ :

$$S(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{q=0}^{Q-1} w_d(q)x(n-q)\exp(-jq\omega) \right|^2 / Q \quad (\text{III.11})$$

Este método de enventanar, solapar y promediar periodogramas recibe el nombre de WOSA (Weighed Overlaped Spectrum Averaging) y todavía hoy en día cubre más del 50% de las aplicaciones y más del 80% de la base de los analizadores de espectro comerciales.

El efecto de  $w_d(q)$  es que cada uno de los segmentos de la señal se enventana antes de proceder a su transformada de Fourier. Es decir cada periodograma será la DFT de  $Q$  datos previamente enventanados con  $w_d(n)$ , en lugar de la segmentación directa que implica una ventana rectangular e igual a  $1/Q$ . Así pues, en esta sección se está generalizando el estimador anterior al plantear el uso de cualquier otra función diferente a la rectangular. A continuación se verá el efecto de esta ventana  $w_d(q)$  sobre el sesgo del estimador.

Asumiendo el origen de muestras en el comienzo del segmento, se tiene el propósito de analizar como se comporta el módulo al cuadrado de la DFT de  $w_d(n)x(n)$  en una longitud de  $Q$  datos. El estimador espectral será el promedio de los  $N$  segmentos solapados que se han formado a partir de las  $N$  muestras originales:

$$P(\omega) = \left| \sum_{q=0}^{Q-1} w_d(q)x(q)\exp(jq\omega) \right|^2 \quad (\text{III.12})$$

Tomando el valor esperado de (III.12):

$$\begin{aligned} E\{P(\omega)\} &= E\left\{ \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{p=0}^{Q-1} w_d(q)w_d^*(p)x(q)x^*(p)\exp(j\omega(q-p)) \right\} = \\ &= \sum_{s=-Q}^Q \left[ \sum_{r=0}^{Q-1} w_d(s+r)w_d^*(r) \right] r(s)\exp(-j\omega s) = \sum_{s=-Q}^Q w(s)r(s)\exp(-j\omega s) \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

De esta expresión se puede concluir que emplear una ventana de datos  $w_d(\cdot)$  equivale a emplear una ventana de correlación igual a la autocorrelación de la ventana de datos. Además, extendiendo el criterio de ventana, se puede pensar que  $P(\omega)$  es la transformada de Fourier del producto de la nueva ventana  $w(\cdot)$  (lag-window) por la función de autocorrelación de  $x(n)$  y que, simplemente, la ventana no deja observar a esta en toda su longitud.

$$E\{P(\omega)\} = F(w(n)r(n)) = \frac{1}{2\pi} W(\omega) * S(\omega) \quad (\text{III.14})$$

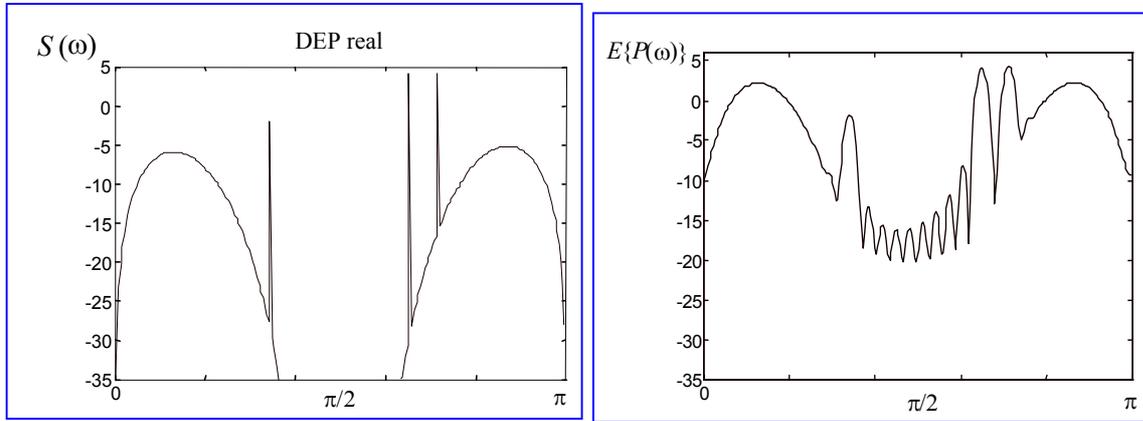
En definitiva, el valor esperado de la DFT de cada segmento es la convolución de la ventana de correlación, denominada lag-window, que a su vez es la autocorrelación de la ventana original denominada data-window, y esto determina la calidad de cada elemento del promedio al realizar la estimación del espectro global. Lo interesante es recordar que el valor esperado de cada sumando es la convolución de la densidad espectral verdadera  $S(\omega)$  con la lag-window.

Es preciso insistir en la naturaleza aleatoria de los estimadores, y en particular del método WOSA: Distintas realizaciones del proceso estudiado dan lugar a distintas estimaciones (véanse las figuras III.1 y III.2) La ecuación (III.14) únicamente caracteriza el comportamiento del WOSA en media y en consecuencia, no es el valor de la estimación para una única realización del proceso.

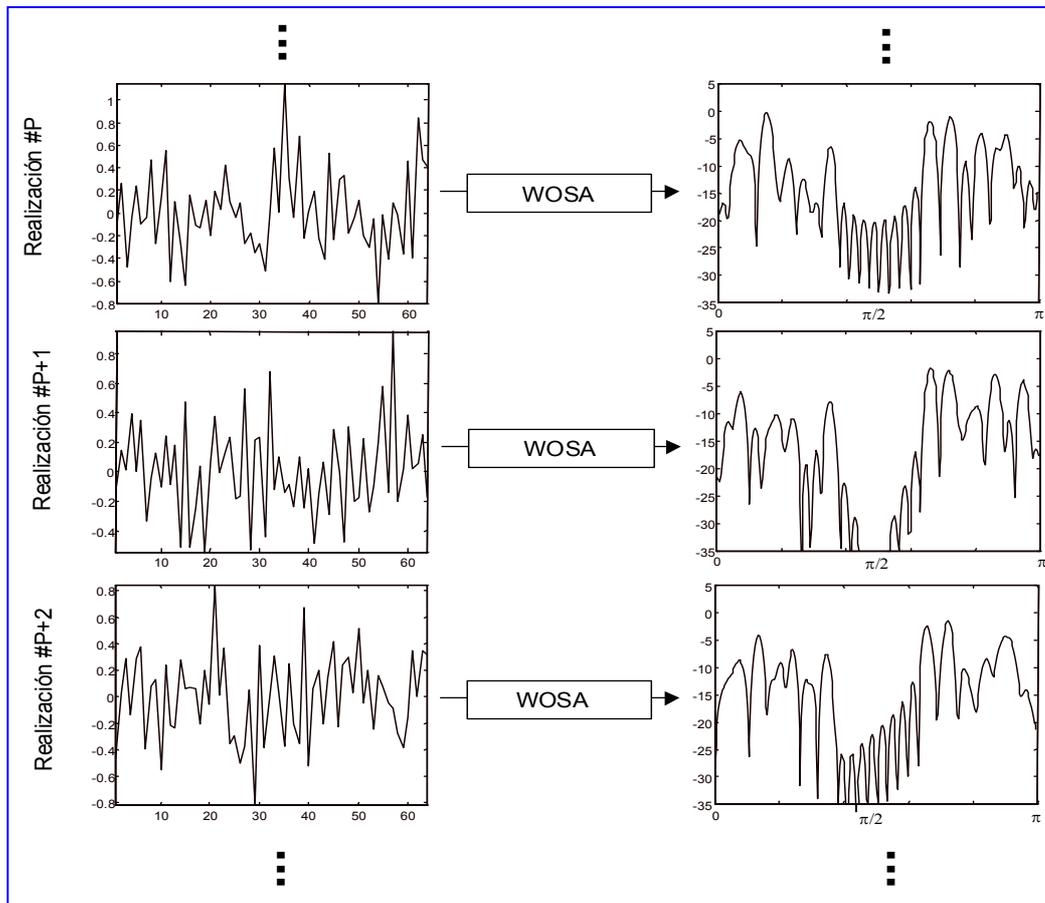
Antes de proseguir con los efectos que sobre el estimador tiene la selección de la ventana, se comprobará qué ocurre en el caso de que ésta sea rectangular, es decir, si  $w_d(t)$  es un rectángulo de duración  $Q$  muestras. La lag-window para este caso es la autocorrelación del rectángulo que sería un triángulo tal y como indica la figura III.3:

$$w_d(q) = \begin{cases} 1 & \forall |q| \leq Q/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$w(q) = \begin{cases} Q - |q| & \forall |q| \leq Q \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \tag{III.15}$$



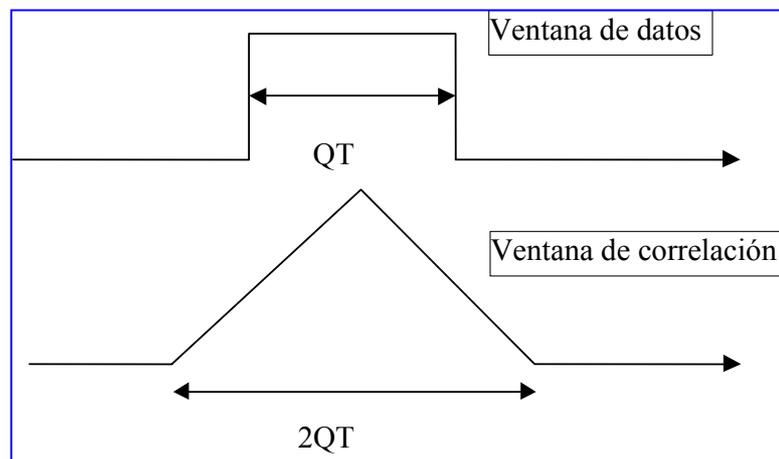
**Figura III.1. Densidad espectral de potencia teórica de un proceso y media del método WOSA con ventana de datos rectangular de 64 muestras. Puede apreciarse el efecto de la Convolución de la ventana sobre la densidad espectral teórica.**



**Figura III.2. Distintas realizaciones del proceso cuya densidad espectral real se muestra en la figura III.1, dan lugar a distintas estimaciones.**

De nuevo puede verse que el truncar los datos de manera rectangular (y formar el estimador de la matriz de correlación obteniendo así el estimador insesgado de correlación) cuando se calcula el periodograma del segmento aparece la ventana triangular, que en definitiva conlleva utilizar el estimador sesgado de correlación. En resumen, basta recordar para lo que sigue que al emplear una ventana en el vector de datos, cuando se forma el estimador de la matriz de autocorrelación, conlleva el usar la autocorrelación de la ventana cuando se pasa al estimador espectral. A partir de este momento es fácil estudiar las consecuencias de alterar la forma y o el tamaño de la ventana de datos o de lag.

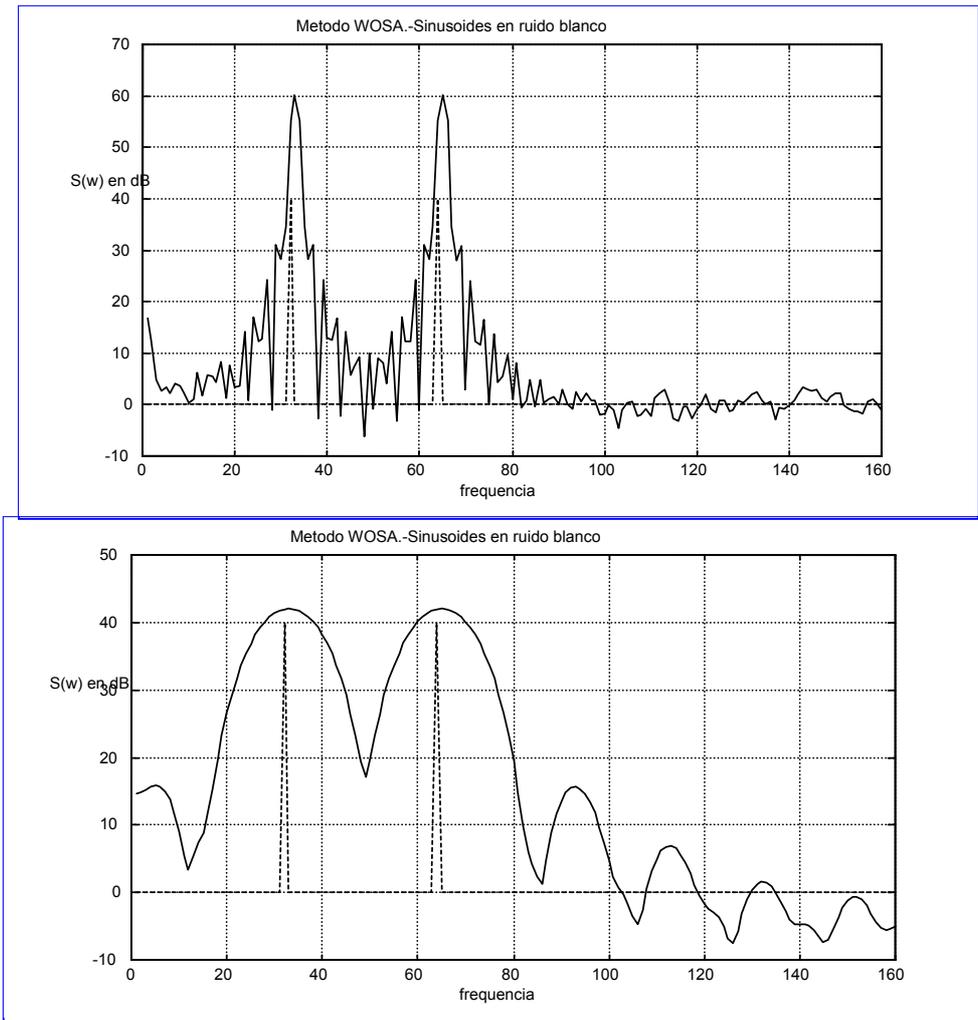
Antes de contestar, dentro de lo posible la pregunta anterior, se vera una situación práctica donde el efecto de ventana tiene lugar y por tanto es de un interés crucial el responder correctamente a la pregunta anterior. Se puede demostrar que todo sistema radiante produce un campo lejano que es la transformada de Fourier del campo en la apertura (ver figura III.5). Esto quiere decir que en tanto las aperturas (altavoces en audio o antenas en radiofrecuencia) tengan una dimensión finita, el campo en la apertura se ve físicamente enventanado a unas dimensiones determinadas. La pregunta de cómo ha de ser el campo en la apertura para que el campo lejano tenga unas propiedades u otras equivale a responder qué tipo de ventana se ha de usar en la apertura. O bien, como ha de ponderarse el campo en la apertura, presión para acústica, para que el campo radiado sea de una forma u otra. En definitiva, el diseño de ventanas es equivalente al diseño de aperturas para sistemas radiantes y como se podrá observar es de extrema utilidad comprender su diseño y efectos.



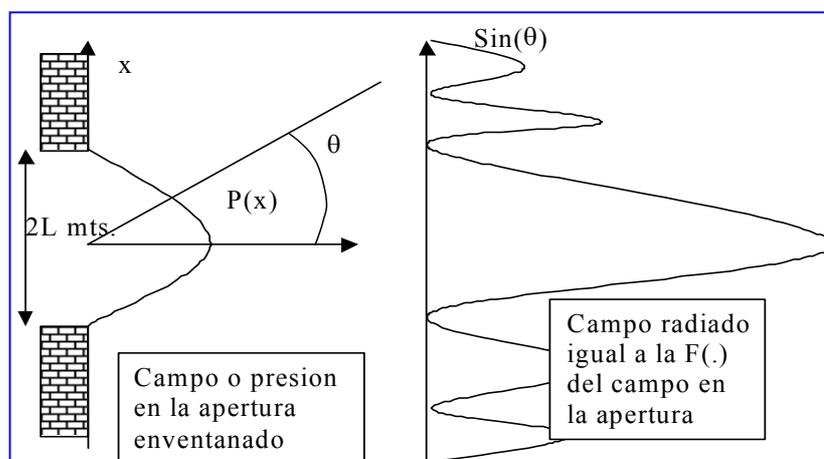
**Figura III.3. Ventana de datos rectangular y ventana de autocorrelación triangular (la autocorrelación de la ventana de datos).**

Recapitulando, se dispone de un estimador espectral, que básicamente es el promedio de periodogramas, y que estos se calculan vía la DFT de segmentos de  $Q$  muestras. La longitud  $Q$  determina la resolución en frecuencia del estimador y el número de promedios su varianza. Se ha de estudiar ahora cuales son los efectos de incluir una ventana de datos antes de proceder a la DFT.

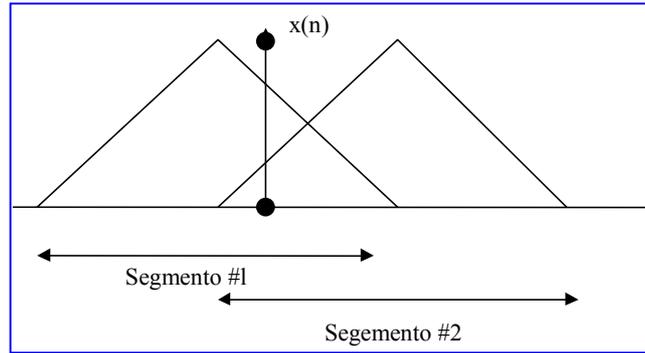
El primer efecto de utilizar una ventana de datos es que equivale a emplear su autocorrelación (señal de energía finita) en la ventana de correlación. El segundo efecto es doble: por un lado, la ventana de correlación al convolucionarse con el espectro correcto (siempre en términos de valor esperado) modifica la resolución del estimador; por otro lado, al ponderar de manera diferente los elementos de un segmento permite y hasta obliga a solapar segmentos y por tanto reducir varianza. En definitiva, las ventanas son un procedimiento de disminuir la resolución para ganar en varianza. Para ver que efectivamente el solapamiento se puede aumentar y por tanto disminuir varianza, obsérvese la figura III.6. En esta figura se observa con detalle como, al usar una ventana triangular, una muestra del segmento  $l$  participa al 80% de su valor en la DFT del segmento  $l$ . Por esta razón se le puede compensar el 20% restante en el siguiente vía el solapamiento. En resumen, si se usara una ventana triangular los segmentos se podrían solapar un 50% y por tanto reducir varianza.



**Figura III.4. Estimador WOSA con ventana rectangular sobre los datos (triangular sobre la correlación) usando 1024 muestras. A la izquierda estimación a partir de segmentos de 256 muestras; a la derecha, segmentos de 32 muestras. Obsérvese la pérdida de resolución del segundo respecto al primero. Por contra, se verá que la varianza es mayor cuando se promedia con un número menor de segmentos. En línea continua el estimador, en línea de puntos el verdadero.**



**Figura III.5 El campo radiado como la transformada de Fourier (seno del ángulo de elevación) del campo en la apertura. Enventanado de  $2L$  mts. con una ventana de amplitud decreciente hacia los bordes.**



**Figura III.6. Incremento del solapamiento entre segmentos gracias al uso de una ventana triangular para conseguir una contribución al 100% en el estimador de todas las muestras dentro de un segmento.**

La pérdida de resolución es obvia pues la ventana triangular tiene un lóbulo principal en su transformada de tamaño doble del que tiene una rectangular de la misma duración (ver figura III.7). Así pues, sabiendo que la ventana tiene un compromiso varianza/resolución, es preciso definir de qué alternativas se dispone. Para verlo se pondrá el tema desde un punto de vista más de señal que de estimadores. Escribiendo la ecuación (III.14) de nuevo:

$$E\{P(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} W(\omega) * S(\omega) \quad (\text{III.15})$$

La respuesta de la ventana de correlación, se observaría si el espectro verdadero  $S(\omega)$  fuera una delta  $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ , por lo que la potencia verdadera sería su integral, es decir la unidad. En esta situación, el estimador sería directamente la transformada de Fourier de la ventana de correlación. Así pues, la ventana como tal ha de tener las propiedades de una densidad espectral de potencia. Bajo este hecho, la ventana de correlación habrá de poseer las propiedades que a continuación se enumeran:

- 1.- La ventana de correlación ha de ser siempre positiva para poder ser candidata a estimador de densidad espectral. Esta condición queda garantizada usando cualquier ventana de datos pues:

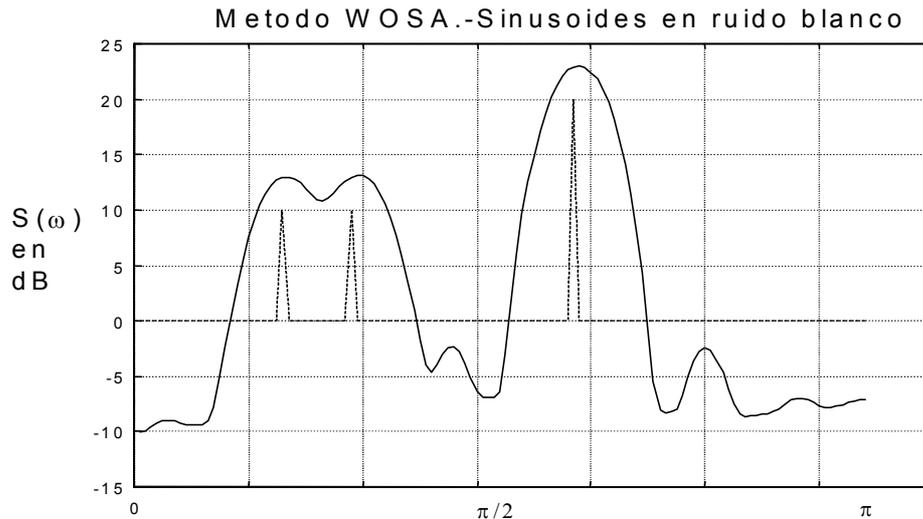
$$W(\omega) = |W_d(\omega)|^2 \quad \text{o bien} \quad w(n) = w_d(n) * w_d(-n) \quad (\text{III.16})$$

- 2.- Para no introducir sesgo su área ha de ser igual a la unidad, de otro modo, no mediríamos ni tan siquiera bien la potencia del proceso como integral de la densidad espectral de potencia estimada. Por el teorema de Parseval esto se traduce en que la energía de la ventana de datos sea la unidad.

$$\int W(\omega) d\omega = 1 = \int |W_d(\omega)|^2 d\omega = \sum_{q=0}^{Q-1} w_d^2(n) \quad (\text{III.17})$$

Si esta condición no se verificase se habría de dividir cada segmento por la energía de la ventana. Esta es la razón de que, cuando se empleaba ventana rectangular de longitud  $Q$ , cada módulo al cuadrado de la DFT se había de dividir por  $Q$  (ver ecuación III.1) para obtener el periodograma del segmento, antes de promediar.

Nótese que, en términos de vectores, es decir tomando de nuevo la ventana como un vector, la condición anterior equivale a pedir norma unidad de dicho vector.



**Figura III.7. Estimación espectral comparable al de la figura III.2, usando 1024 muestras y segmentos de 32 muestras. La diferencia estriba en que, en este caso, la ventana de datos es triangular y no rectangular. Puede apreciarse la pérdida de resolución debido a la mayor duración del lóbulo principal de la transformada de Fourier de la ventana.**

- 3.- Además de la resolución, la ventana introduce potencia o densidad de potencia a la derecha y a la izquierda del valor a medir, por efecto de sus lóbulos secundarios (efecto “leakage”, véanse las figuras III.4 y III.7). Por esta razón se le impone que no privilegie ninguno de los dos lados, es decir, que ha de ser par. De nuevo, esta condición está garantizada si la ventana de correlación proviene de una de datos. Esto garantiza además que el máximo de  $W(\omega)$  este en el origen para que no introduzca sesgo.
- 4.- La cantidad de potencia que se manda a la derecha y a la izquierda está directamente relacionada con el tamaño de lóbulos laterales de  $W(\omega)$  y su velocidad de decrecimiento. Además, se sabe que este comportamiento está en relación con el número de derivadas continuas de su transformada inversa. Más concretamente, si la ventana de datos tiene su derivada  $m$  discontinua ( $m=0$  rectangular,  $m=1$  triangular, etc.), su transformada decae como  $1/\omega^{m+1}$  y la transformada de correlación (que influye decisivamente sobre el leakage) como su cuadrado. En resumen el leakage decaerá a  $6(m+1)$  dB por octava. Nótese que el leakage impediría observar correctamente rayas espectrales pequeñas que, al estar próximas a una grande, quedarían enmascaradas. Este efecto de la ventana es similar al enmascaramiento que tiene lugar en la membrana basilar del sistema auditivo (oído interno).

De estas restricciones el lector puede reconocer el compromiso resolución/varianza en la contradicción existente entre las condiciones 3 y 4: Lóbulos laterales de poca amplitud implican poco “leakage”, pero a su vez lóbulos principales anchos, que disminuirán la resolución del estimador. A su vez, un lóbulo principal ancho influirá en la reducción de varianza. Este compromiso puede analizarse también desde el punto de vista de sistemas radiantes. Si lo que se quiere es una cobertura lo mayor posible, la resolución no será un problema sino todo lo contrario por lo que la ponderación del campo en la apertura será de muchas derivadas continuas en los bordes. Si por el contrario se deseara mucha directividad la transición en los bordes debería ser lo más brusca posible.

Es preciso incidir en el hecho de que no existe una ventana óptima, sino compromisos más o menos brillantes que influyen en el sesgo y la varianza. Muchas de las ventanas que se listarán más adelante son diseños ad-hoc sin ninguna justificación a priori. En cualquier caso, su uso está aun muy extendido en todas las aplicaciones mencionadas hasta este momento. Realmente, hasta la aparición del método de Thomson el problema de diseño de ventanas era un problema abierto, el autor demostró en su publicación que el planteamiento era incorrecto, como podrá verse en el aparatado correspondiente.

Entre las ventanas de datos más utilizadas, además de la rectangular y la triangular están las siguientes, todas de duración limitada al intervalo  $(0,T)$ ; también se especifica su ancho de lóbulo principal normalizado y el nivel en dB de su primer lóbulo lateral referido a su valor en el origen (ver figura III.8):

- Triangular	$1 - \frac{2 t - T/2 }{T}$	$B_o = \frac{\pi}{16}$	$\alpha_{SL} = -13dB.$
- Hanning	$0,5 \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right)$	$B_o = \frac{\pi}{8}$	$\alpha_{SL} = -32dB.$
- Hamming	$0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi t}{T}$	$B_o = \frac{\pi}{8}$	$\alpha_{SL} = -42dB.$
- Blackman	$0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi t}{T} + 0,08 \cos \frac{4\pi t}{T}$	$B_o = \frac{3\pi}{16}$	$\alpha_{SL} = -58dB.$

Además de las expuestas existen familias de ventanas parametrizadas con características específicas. Son de mencionar las ventanas de Dolph-Tchebyshev que al tener lóbulos laterales constantes son muy apreciadas en sistemas radiantes, dado que produce un nivel de leakage uniforme y acotado fuera de su lóbulo principal.

También puede abordarse el diseño de una ventana con alguna propiedad específica. En este sentido, se va a presentar el caso de diseño de una ventana de manera que tenga la propiedad de mínimo sesgo espectral. Para ello se escribirá de nuevo la relación del valor esperado del periodograma,

$$E\{P(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} W(\omega) * S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int W(\phi) S(\omega - \phi) d\phi \quad (III.18)$$

se puede desarrollar en serie de Taylor el termino  $S(\omega - \phi)$  alrededor del punto  $\omega$  hasta el orden tres.

$$s(\omega - \phi) \approx s(\omega) - \phi s'(\omega) + \frac{\phi^2}{2} s''(\omega) - \frac{\phi^3}{6} s'''(\omega) \quad (III.19)$$

Al insertar esta aproximación en la integral de convolución, los términos impares se anulan pues la ventana es par y queda que el estimador tiene dos componentes, como muestra (III.20),

$$E\{P(\omega)\} \approx s(\omega) \frac{1}{2\pi} \int W(\phi) d\phi + \frac{s''(\omega)}{2} \frac{1}{2\pi} \int \phi^2 W(\phi) d\phi \quad (III.20)$$

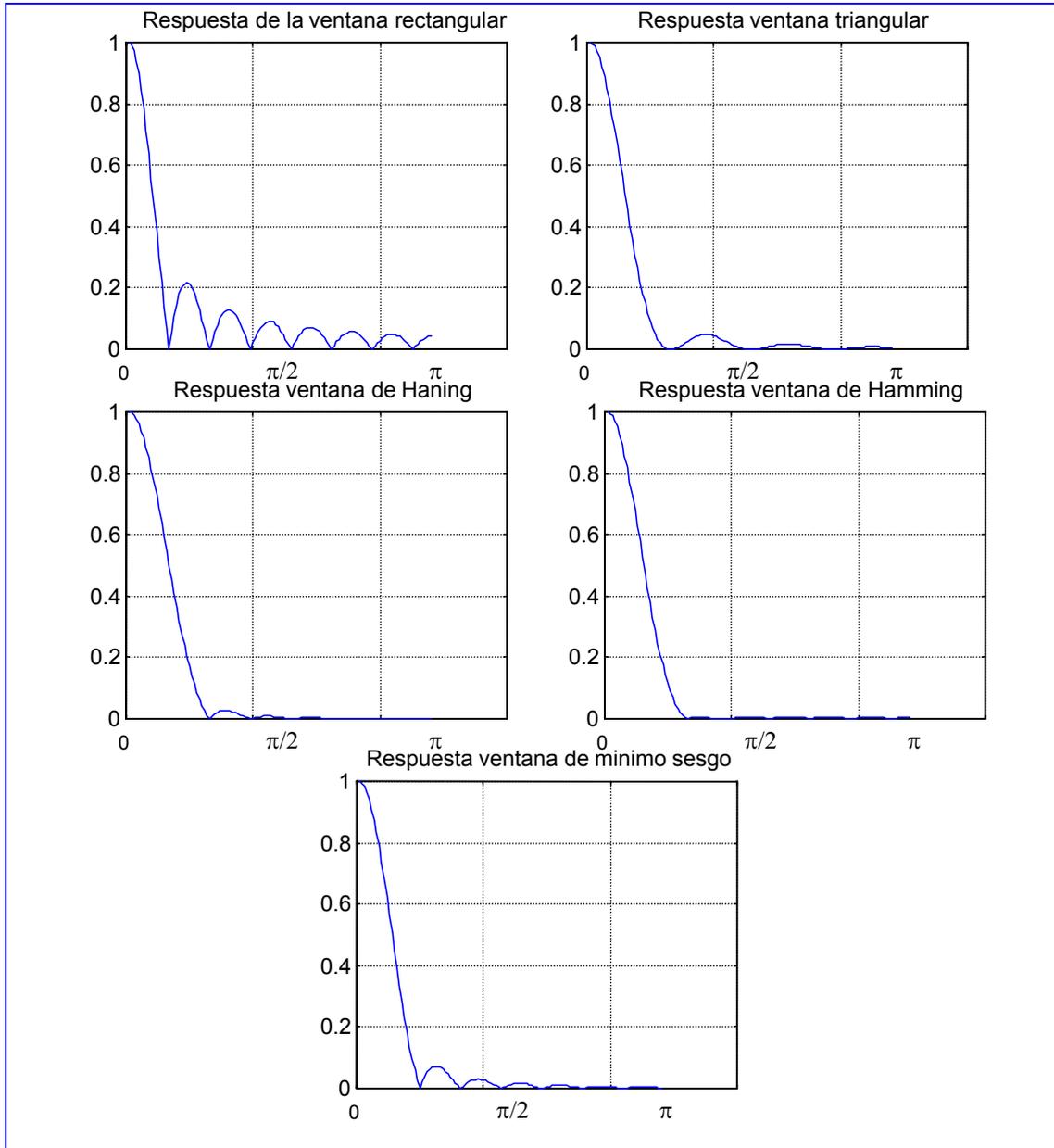
De esta expresión, se vuelve a concluir que para que el estimador no tenga sesgo  $w(0)$  ha de ser la unidad, lo que equivale a que la energía de la ventana de datos sea la unidad y será una restricción de diseño. Otra conclusión inmediata es que el sesgo queda formado directamente por el momento de segundo orden de la ventana y que el objetivo del diseño será minimizarlo. Este momento de segundo orden, en función de la ventana de datos y por Parseval equivale a minimizar el área de módulo al cuadrado de la derivada. En definitiva, se llega a un diseño de minimización con restricciones en una formulación variacional:

$$\int_{-T/2}^{T/2} w_d^2(t) dt = 1 \quad \int_{-T/2}^{T/2} \left| \frac{\partial w_d}{\partial t} \right|^2 dt \Bigg|_{min} \quad (III.21)$$

El lagrangiano aparece en la ecuación (III.22.a) donde se ha incluido el multiplicador de Lagrange, y la función que verifica el mínimo se obtiene de (III.22.b) donde se ha usado  $w_d$  para denotar abreviadamente la derivada de la ventana con respecto al tiempo:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left[ \left| \frac{\partial w_d}{\partial t} \right|^2 - \lambda (w_d^2(t) - 1) \right] dt \quad (\text{III.22.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial w_d} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left| \frac{\partial w_d}{\partial t} \right|^2 - \lambda w_d^2(t) \right] = 0 \quad (\text{III.22.b})$$



**Figura III.8. Respuesta frecuencial de las ventanas más usadas donde puede observarse su compromiso en resolución y nivel de lóbulo lateral.**

La ecuación diferencial que resulta en (III.22.b) es trivial y encontrar el multiplicador de la restricción también. La solución que se obtiene, para la ventana de datos y la de correlación son:

$$w_d(t) = \begin{cases} \frac{2}{T} \cos \frac{\pi t}{T} & \forall |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (III.23)$$

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left| \sin \frac{\pi t}{T} \right| + \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \cos \frac{\pi t}{T} & \forall |t| \leq T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

A modo de resumen de todo lo anterior, de los dos apartados expuestos se dispone de un estimador espectral, que será de referencia para el resto del tema, formado del siguiente modo: a) Seleccionar tamaño del segmento Q y ventana de datos con criterios de resolución; b) tomar la DFT de cada segmento inventanado y dividir por la energía de la ventana su módulo al cuadrado si es que esta no se ha normalizado previamente; c) promediar todos los M segmentos disponibles para obtener el estimador espectral:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{\left| \sum_{q=0}^{Q-1} w_d(q) x(q + (m-1)Q) \exp(jq\omega) \right|^2}{\sum_{q=0}^{Q-1} w_d^2(q)} \right\} \quad (III.24)$$

### III.3. ESTIMACION CON MULTIPLES VENTANAS.

En 1982 David J. Thomson<sup>1</sup> publica un procedimiento de análisis espectral en el que combina principios fundamentales o básicos de densidad espectral con el formalismo de lo que, aun hoy, se considera uno de los mejores procedimientos para análisis espectral no parametrizado. Tan solo la escasa complejidad del estimador NMLM, relativa a su calidad, compete con la elevada complejidad del método que sigue.

Dada una realización de un proceso  $x(t)$  su transformada de Fourier queda definida por la siguiente integral:

$$x(n) = \int_{-0.5}^{0.5} \exp(j2\pi.n.v).dz(v) \quad (III.25)$$

La media de  $dz$  es cero y su varianza define la densidad espectral del proceso.

$$E[ dz(v) ] = 0 \quad E[ |dz(v)|^2 ] = S_x(v).dv \quad (III.26)$$

Para la estimación del espectro, ha de considerarse como dato la DFT de la secuencia de datos disponible. La relación conocida por el lector entre la DFT y la secuencia de datos sería:

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n). \exp(-j2\pi f.n) \quad (III.27)$$

Al combinar ambas ecuaciones nos enfrentamos a un problema de deconvolución. Es decir, dada  $X(f)$  y conocido el kernel en la ecuación de convolución, el problema es estimar  $dz$ . Este es todo el problema a resolver y, sin duda, es en esta sencillez donde reside el contenido más interesante del planteamiento del procedimiento.

<sup>1</sup> David J. Thomson. "Spectrum estimation and harmonic analysis". Proc. IEEE, Vol. 70 No. 9, pp. 1055-1096, 1982.

$$X(f) = \int_{-0.5}^{0.5} \frac{\sin(N\pi(f-\nu))}{\sin(\pi(f-\nu))} dz(\nu) \quad (\text{III.28})$$

Para resolver la ecuación anterior se recurre a un desarrollo funcional de  $dz$  del modo que se expone a continuación. Si el problema es:

$$X = K * dz \quad (\text{III.29})$$

Y el desarrollo funcional viene dado por:

$$\hat{dz} = \sum a(m) \cdot \Phi_m \quad (\text{III.30})$$

Al elegir las funciones de modo y manera que:

$$K * \Phi_m = \lambda_m \cdot \Phi_m \quad (\text{III.31})$$

Entonces

$$X = \sum \lambda_m \cdot a(m) \cdot \Phi_m = \sum X_m \cdot \Phi_m \quad (\text{III.32})$$

El procedimiento concluye aquí. Nótese que los coeficientes  $a(m)$  pueden obtenerse del desarrollo funcional de los datos, es decir, de la DFT de la secuencia original, pues los autovalores  $\lambda_m$  son conocidos. Una vez obtenidos los  $a(m)$ , se obtiene, y el correspondiente estimador sería:

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{N} \cdot |\hat{dz}(f)|^2 \quad (\text{III.33})$$

La aparente sencillez del procedimiento desaparece al tratar de encontrar las autofunciones del kernel. Dichas funciones pueden encontrarse en un intervalo  $|f| \leq W$  y hasta un orden  $N$ . Así pues, las funciones deseadas verifican la siguiente ecuación:

$$\int_{-W}^W \frac{\sin(N\pi(f-\nu))}{\sin(\pi(f-\nu))} \cdot \Phi_m(N, W, \nu) \cdot d\nu = \lambda_m(N, W) \cdot \Phi_m(N, W, f) \quad (\text{III.34})$$

$$1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-1} > 0$$

Cuando  $W$  es del orden de  $1/N$  el número de autovalores significativos es bajo, del orden de  $2NW$ . Las autofunciones son doblemente octogonales.

$$\int_{-0.5}^{0.5} \Phi_m \cdot \Phi_n = \delta_{m,n} \quad (\text{III.35})$$

$$\int_{-W}^W \Phi_m \cdot \Phi_n = \lambda_n \cdot \delta_{m,n}$$

Volviendo al problema de estimación, los coeficientes  $X_m$  vienen dados por:

$$X_m = \frac{1}{\lambda_m(N, W)} \cdot \int_{-W}^W \Phi_m(N, W, \nu) \cdot X(\nu) \cdot d\nu \quad (\text{III.36})$$

Si ahora el desarrollo se hace para una frecuencia  $f_0$ , diferente de cero, se tendrá la expresión del coeficiente y el estimador correspondiente.

$$X_m(f_0) = \int_{-W}^W \Phi_m(N, W, \nu) \cdot X(f_0 + \nu) \cdot d\nu$$

$$\hat{dz} = \sum_{n=0}^{N-1} \Phi_m(N, W, f - f_0) \cdot \frac{X_m(f_0)}{\lambda_m(N, W)} \quad (\text{III.37})$$

En este momento puede escribirse el estimador espectral resultante.

$$\hat{S}(f, f_0) = \frac{1}{N} |\hat{dz}|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{m=0}^{N-1} \Phi_m(N, W, f - f_0) \cdot \frac{X_m(f_0)}{\lambda_m(N, W)} \right|^2 \quad (\text{III.38})$$

Finalmente, el estimador a la frecuencia  $f_0$  se obtiene del promedio de la expresión anterior en el ancho de banda  $W$ .

$$\hat{S}(f_0) = \frac{1}{2W} \int_{f_0-W}^{f_0+W} \hat{S}(f, f_0) \cdot df = \frac{1}{2NW} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_m(N, W)} \cdot |X_m(f_0)|^2 \quad (\text{III.39})$$

A la vista de esta expresión es claro que cada uno de los sumandos es en sí un estimador espectral. El nombre que tienen es de prolate-eigenspectrum. De hecho cada uno de ellos es un estimador insesgado de la densidad espectral. Un detalle importante es que los autovalores decrecen con el orden lo que plantea un problema de varianza. En este sentido, es importante ponderar de una manera diferente cada uno de los prolate-eigenspectrum. La asignación de la ponderación y su base formal sale del ámbito de esta presentación y se recomienda al lector recurrir a la referencia del autor del trabajo mencionado al comienzo del apartado.

Un detalle importante es que la ecuación del cálculo de los coeficientes, que es una convolución en el dominio frecuencial, revela el uso de múltiples ventanas en el procedimiento expuesto. Efectivamente, la expresión de los coeficientes  $X_m(f_0)$  se puede poner como:

$$X(f_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \{v_n^{(m)}(N, W)\} \cdot \exp(-j2\pi f \cdot n) \quad (\text{III.40})$$

Esta expresión revela que cada uno de los espectros es en sí un periodograma con una ventana diferente y que viene dada por la transformada inversa de las funciones originales. Estas funciones en el tiempo son las que fueron presentadas por Slepian y las denominó prolate-spheroidal functions. Es por esta razón, y ser autofunciones en la operación de convolución en frecuencia, por la que los estimadores de índice  $m$  se les denomina prolate-eigenspectrum. También es interesante destacar que el estimador revela, de una manera formal, que el empleo de una sola ventana no coincide en absoluto con lo que un análisis formal, como el presentado, revela. Mientras que la primera prolate se asemeja mucho a una de las ventanas que se han descrito en el presente capítulo, las siguientes no obedecen a los criterios generales que se han expuesto para las ventanas tradicionales. El resultado es un estimador de una dinámica espectacular y de gran calidad.

#### III.4. LA VARIANZA DEL PERIODOGRAMA

Como se ha visto en el apartado anterior, el método WOSA se basa en el promedio de periodogramas. El número de promedios reduce la varianza. La cuestión que se abordará en este apartado es cual es la expresión de dicha varianza.

Para calcular la varianza del periodograma correspondiente a un segmento de  $Q$  muestras se considerará que el proceso es ruido blanco gaussiano. Se podría pensar que de este modo se limita la validez del resultado, pero no es así ya que a partir de ruido blanco se puede generar cualquier proceso mediante un sistema lineal. Así pues, la varianza del estimador únicamente se alteraría en el módulo al cuadrado de la función de transferencia del sistema lineal correspondiente. Al finalizar la presentación en esta sección se indica lo sencillo que resulta extender el resultado a cualquier densidad espectral.

Considerando que las  $Q$  muestras de  $x(n)$  son ruido blanco de potencia  $N_o$ , su periodograma tiene por expresión (III.41), donde  $w(n)$  es la ventana de datos utilizada:

$$P(\omega) = \frac{1}{Q} |DFT(w(n)x(n))|^2 \quad (III.41)$$

El valor esperado de  $P(\omega)$ , para el caso de ruido blanco carece de sesgo:

$$E\{P(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int N_o |W(\phi)|^2 d\phi = N_o = S(\omega) \quad (III.42)$$

Debido a ser de sesgo nulo, la varianza se reduce al valor esperado de su cuadrado menos  $N_o^2$ . Se calculara el valor esperado del cuadrado del periodograma para el caso en que la señal de entrada sea real, si bien el resultado será generalizable a procesos complejos (ruido i-q en sistemas de comunicaciones).

$$E\{P(\omega_1)P^*(\omega_2)\} = \frac{1}{Q^2} \sum_{r,s,p,q} E\{x(r)x(s)x(p)x(q)\} w(r)w(s)w(p)w(q) \exp[j(\omega_1(s-r) + \omega_2(q-p))] \quad (III.43)$$

La función anterior es de difícil cálculo, excepto si se la desarrolla para un proceso gaussiano (ver Capitulo II, sección II.10). El momento de cuarto orden, teniendo en cuenta el carácter incorrelado del ruido blanco se reduce a:

$$E\{x(r)x(s)x(p)x(q)\} = r(r-s)r(p-q) + r(r-p)r(q-s) + r(r-q)r(p-s) = N_o^2 [\delta(r-s)\delta(p-q) + \delta(r-p)\delta(q-s) + \delta(r-q)\delta(p-s)] \quad (III.44)$$

Esta abundancia de deltas simplifica el cuádruple sumatorio y lo reduce a:

$$\begin{aligned} E\{P(\omega_1), P(\omega_2)\} &= \\ &= \frac{N_o^2}{Q^2} \left\{ Q^2 + \sum_{p,q=0}^{Q-1} w^2(p)w^2(q) \exp[j(p-q)(\omega_1 + \omega_2)] + \sum_{p,q=0}^{Q-1} w^2(p)w^2(q) \exp[j(q-p)(\omega_1 - \omega_2)] \right\} = \\ &= N_o^2 \left\{ 1 + |W(\omega_1 - \omega_2)|^2 + |W(\omega_1 + \omega_2)|^2 \right\} \end{aligned}$$

Claramente la varianza depende de la ventana a utilizar y, aunque para dos frecuencias iguales ya se puede obtener una expresión, para simplificarla, se considerará el caso de una ventana de datos rectangular. Operando en esta última expresión y recordando la expresión (III.42) se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{P(\omega_1), P(\omega_2)\} &= E\{P(\omega_1), P(\omega_2)\} - E\{P(\omega_1)\}E\{P(\omega_2)\} = \\ &= N_o^2 \left\{ \frac{\text{sen}^2[Q(\omega_1 - \omega_2)/2]}{Q^2 \text{sen}^2[(\omega_1 - \omega_2)/2]} + \frac{\text{sen}^2[Q(\omega_1 + \omega_2)/2]}{Q^2 \text{sen}^2[(\omega_1 + \omega_2)/2]} \right\} \quad (III.45) \end{aligned}$$

De esta expresión puede deducirse que la correlación cruzada entre los periodogramas a dos frecuencias diferentes tiende a cero cuando el número de muestras  $Q$  tiende a infinito. En otras palabras, para longitudes de puntos razonables, puede considerarse que los valores del periodograma en dos frecuencias diferentes están incorrelados.

El resultado más sorprendente, que evidencia lo crucial que es promediar, es que cuando las dos frecuencias son iguales, la covarianza es:

$$\text{var}\{P(\omega)\} = N_o^2 \left[ 1 + \frac{\text{sen}^2(Q\omega)}{Q^2 \text{sen}^2(\omega)} \right] \quad (\text{III.46})$$

¡Aproximadamente el cuadrado de la cantidad a estimar, y, además no tiende a cero cuando aumenta el número de muestras  $Q$ !. Esta es la razón por la que, a costa de perder resolución, se han de promediar periodogramas y hacer que la varianza disminuya con el número de promedios. Más curioso es el efecto siguiente: es claro que mediante el promediado, se consigue reducir varianza en un factor, digamos  $\varepsilon$  (igual a  $1/M$ , siendo  $M$  el número de segmentos independientes), pero siempre la varianza del estimador WOSA es proporcional al valor a estimar. Así si el valor correcto es digamos  $S(\omega)$ , la varianza hace poner como límites de confianza una franja de ancho  $\pm\varepsilon S(\omega)$ . Dicho de otro modo, los márgenes de confianza no son constantes al ser proporcionales al espectro a medir:

$$P(\omega) = S(\omega)(1 \pm \varepsilon) \quad (\text{III.47})$$

Esta es la razón de la utilidad, y casi la necesidad, de representar las densidades espectrales en dB o cualquier otra escala logarítmica. Si se toma  $10\log(\cdot)$  de la ecuación anterior y considerando que  $\varepsilon$  es pequeño se tiene,

$$P(\omega)(dB) = S(\omega)(dB) + 10\log(1 \pm \varepsilon) \cong S(\omega)(dB) \pm \varepsilon(dB) \quad (\text{III.48})$$

Una representación con niveles de confianza equidistantes del valor correcto e independientes de la frecuencia a la que se esta estimando el espectro.

Volviendo ahora al planteamiento de ruido blanco y la validez a cualquier otra señal o proceso de lo expuesto. Si se procesa ruido blanco con un sistema de función de transferencia  $H(\omega)$  la varianza de la salida sería aproximadamente la de la entrada (calculada en III.46) por el módulo a la cuarta potencia de la función de transferencia. En resumen, la expresión (III.47) es valida para cualquier densidad espectral de potencia no blanca. Recuerde que en cualquier caso, el sesgo del periodograma es siempre diferente de cero salvo en el caso de que el proceso sea ruido blanco. Se deja al lector el razonar este hecho a partir de lo expuesto en este y anteriores apartados.

### III.5. BANCO DE FILTROS EN ANALISIS ESPECTRAL.

En esta sección se va a dar una versión más moderna y sencilla de comprender los conceptos vistos hasta ahora en este capítulo y que constituye la formulación más elegante para análisis espectral. Además vera, gracias a la formulación que se presentara, la manera de mejorar enormemente las prestaciones del método WOSA. Con todo, se ha de insistir en que, aunque aparentemente diferente, se llegará al mismo estimador con argumentos y formulación más sencillos cómodos y fáciles de entender. Este punto de vista permite introducir el mejor estimador espectral, al menos de los denominados no-paramétricos, que se mostrara en la sección III.6.

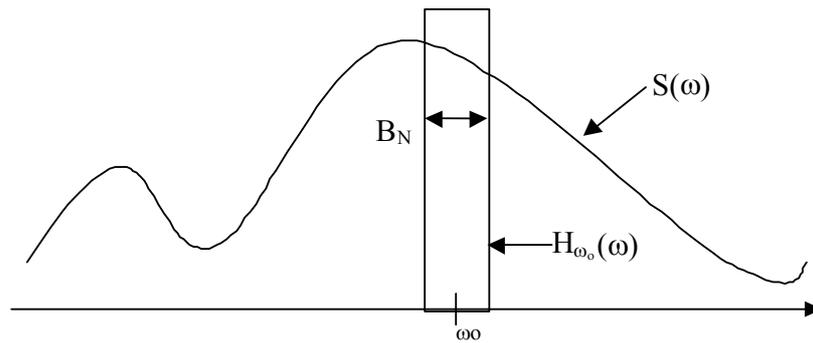
Una manera natural de estimar el espectro estaría basada en la relación entre la densidad espectral a la salida de un filtro referida a la de su entrada. Si el filtro es paso banda y centrado en la frecuencia  $\omega_o$  las ecuaciones que interesan serían:

$$y_{w_o}(n) = \sum_{q=0}^{Q-1} h_{w_o}(q)x(n-q) = \underline{h}_{w_o}^H \underline{X}_n \quad (\text{III.49})$$

$$S_y^{w_o}(\omega) = |H_{w_o}(\omega)|^2 S(\omega)$$

Nótese la similitud entre el papel que juega la respuesta impulsional del filtro y la ventana de la sección anterior. Está claro que, en el diseño del filtro, el diseñador se enfrenta a los mismos problemas que entraña el diseño de ventanas.

Tal como puede verse en la Figura III.9, si el filtro es bastante selectivo la potencia de la señal de salida nos dará el contenido de potencia (no de densidad de potencia) de la entrada en la banda  $B_N$ .



**Figura III.9. Filtrado paso banda para estimar el contenido espectral de la señal de entrada.**

La potencia de la señal de salida tendría como expresión temporal:

$$P(\omega_o) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_{\omega_o}^H X_n X_n^H h_{\omega_o} \quad (\text{III.50})$$

donde puede observarse su paralelismo con un periodograma. El equivalente a la relación anterior en el dominio frecuencial sería:

$$P(\omega_o) = \int_{B_N} |H_{\omega_o}(\omega)|^2 S(\omega) d\omega \approx |H_{\omega_o}(\omega_o)|^2 B_N S(\omega_o) \quad (\text{III.51})$$

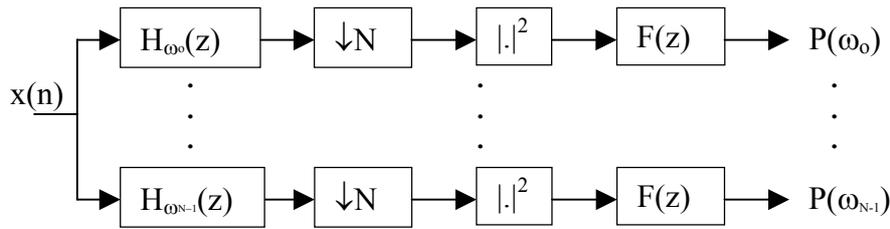
(III.43), donde se ha usado que el filtro es estrecho y por tanto prácticamente uniforme en su ancho de banda.

Dado que la expresión anterior es una aproximación, de su uso no se obtiene la densidad espectral sino un estimador de ésta. Controlando que la respuesta del filtro a la frecuencia de análisis es la unidad (comparar con la misma propiedad en ventanas), dicho estimador, para cualquier frecuencia  $\omega$ , será:

$$S(\omega) = \frac{P(\omega)}{B_N} = \frac{1}{N} \frac{1}{B_N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| h_{\omega}^H X_n \right|^2 \quad (\text{III.52})$$

La similitud con WOSA ya es prácticamente total.

Resta ver cómo diseñar el filtro o filtros. En la práctica, existen dos alternativas basadas ambas en usar un filtro prototipo paso bajo que, por modulación, se va trasladando a todas las  $\omega$  a las que se desea obtener la estimación. Estos filtros en paralelo formarían un banco de filtros cuya potencia de salida, normalizada por el ancho de banda (el mismo para todos) proporcionaría el estimador a la frecuencia a la que se ha situado cada uno (véase la figura III.10). La otra alternativa denominada de analizador secuencial sería trasladar la señal en lugar del filtro. Dado que ambas son equivalentes, el análisis se reducirá al caso de usar un banco de filtros. Bajo el punto de vista de tecnología DSP la programación directa de (III.52) es la mejor.



**Figura III.10. El analizador espectral como banco de filtros. Cada una de las N ramas del banco estima en tiempo real la densidad espectral de potencia a una de N frecuencias en la banda [0,π]. Cada uno de los filtros H(z) tiene una respuesta centrada a la frecuencia de interés. El filtro F(z) funciona como promediador de periodogramas.**

Centrándose en el diseño del filtro, si este está basado en un prototipo de respuesta  $h(q)$   $q=0, \dots, Q-1$ , el filtro centrado a la frecuencia de medida  $\omega$  vendría dado por:

$$\underline{h}_\omega^T = [h(0) \quad h(1) \exp(j\omega) \quad \dots \quad h(Q-1) \exp(jq(Q-1)\omega)] \tag{III.53}$$

Dejando, de momento, de lado el prototipo a emplear, se calculará el ancho de banda. Es difícil tomar una decisión sobre qué definición sería más adecuada para el ancho de banda. Si se prima la facilidad de cálculo, el criterio se reduce prácticamente al denominado ancho de banda al ruido blanco. La definición de este ancho de banda establece que es aquel ancho de banda que puesto en un filtro ideal de ganancia igual a la respuesta del filtro real y situado a la frecuencia central, produce el mismo nivel potencia de ruido a su salida. Al formular  $B_N$ , sería:

$$|H(0)|^2 B_N = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \underline{h}^H \underline{h} \tag{III.54}$$

$$B_N = \underline{h}^H \underline{h}$$

En otras palabras, si la respuesta en la frecuencia central es la unidad, el ancho de banda al ruido es directamente la norma de la respuesta impulsional. Con lo que el estimador espectral sería:

$$S(\omega) = \frac{P(\omega)}{\underline{h}_\omega^H \underline{h}_\omega} = \frac{1}{N} \frac{1}{\underline{h}_\omega^H \underline{h}_\omega} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{h}_\omega^H X_n \right|^2 \tag{III.55}$$

De la expresión del ancho de banda se deduce una propiedad de este analizador espectral y es que el ancho de banda de análisis, o bien la resolución del estimador, es constante al tratarse de filtros trasladados en frecuencia. Recuerde que los filtros se generan por modulación y no por transformación de frecuencias. Una crítica al método es que en muchas aplicaciones el ancho de banda constante no es el más adecuado. Por ejemplo, el oído humano funciona como un analizador espectral en el que el ancho de banda aumenta con la frecuencia, por lo cual para señales de voz o de audio el ancho de banda constante no parece el más adecuado, o al menos no para emular el sistema humano de percepción acústica. A pesar de todo, se seguirá considerando que el ancho de banda es constante para concentrarse en el diseño del prototipo.

Respecto a la elección del prototipo, podría considerarse que para obtener una sinusoide (de frecuencia cero como corresponde al prototipo) en ruido blanco el mejor filtro es el adaptado. Al margen de que el concepto de filtro adaptado va ligado a relación señal a ruido y de que requiere conocer la densidad espectral de ruido, la mención a este se limita al caso de considerar que se trata de ruido blanco y el filtro tiene la forma de la señal a determinar. De este modo, el prototipo sería directamente un rectángulo de Q unos:

$$\begin{aligned}
\underline{h}^T &= [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \\
\underline{h}^T \underline{h} &= Q \\
\underline{h}_\omega^T &= [1 \quad \exp(j\omega) \quad \cdots \quad \exp(j(Q-1)\omega)] = \underline{S}^T
\end{aligned} \tag{III.56}$$

Su ancho de banda es constante, y al desplazarlo a una frecuencia  $\omega$  coincide con el vector que se ha venido denominando como  $\underline{S}$  (véase la ecuación III.1). Ahora sí, al sustituir (III.56) en la expresión del estimador, se obtiene exactamente la expresión del método WOSA.

La formulación permite interpretar perfectamente WOSA como un banco de filtros. Lo más alarmante es que la formulación pone de manifiesto que WOSA es óptimo únicamente cuando se busca una sola senoide en ruido blanco. Escenarios con más de dos sinusoides o la coloración del ruido hacen de WOSA un procedimiento sencillo computacionalmente pero subóptimo. El filtro  $\underline{S}$  es adaptado a una senoide de frecuencia  $\omega$ , tan solo cuando el ruido es blanco. Nótese que este carácter óptimo o subóptimo lo confiere el filtro o conjunto de filtros seleccionados. Cambiar el filtro básico por otro cualquiera, que actuara como la ventana ad-hoc en WOSA en lugar de la rectangular, no arregla su carácter subóptimo ya que ni tan solo garantizaría la optimalidad en el caso de una sola senoide en ruido blanco. En resumen, en términos estrictos WOSA es solo óptimo para estimar la densidad espectral de ruido blanco y esto es así solo si emplea ventana rectangular. En definitiva, todo parece conducir a que el filtro o los filtros para medir la densidad a cada frecuencia dependen del espectro a estimar. Este diseño de filtros dedicados a los datos será el problema a abordar en la próxima sección. A pesar que se conseguirá un método de mucha mayor calidad no debe olvidarse que WOSA es muy sencillo y que en la solución de un problema práctico hay que decidir siempre el compromiso calidad/complejidad.

### III.6 METODO DE MINIMA VARIANZA (MLM)

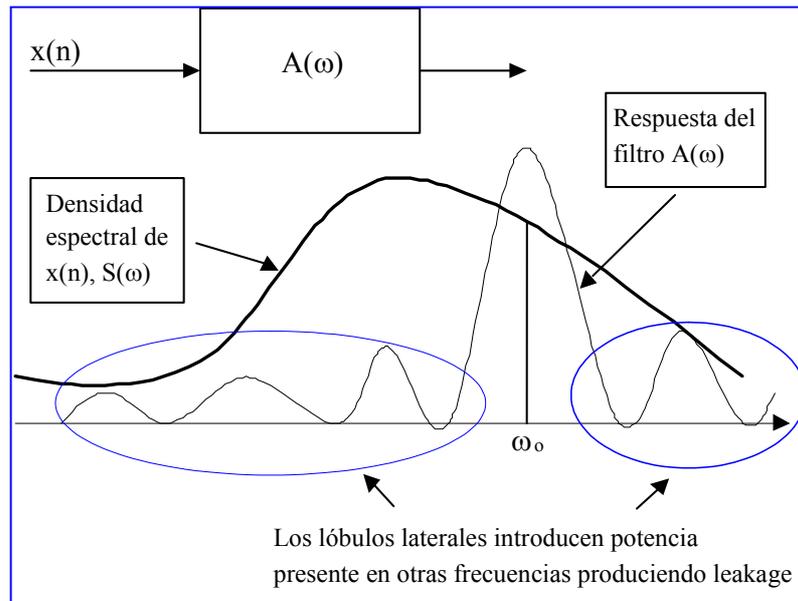
Volviendo al diseño genérico del banco de filtros, para cada frecuencia en la que se desea estimar la densidad espectral de potencia hay que diseñar un filtro específico. Dicho filtro dependerá de la frecuencia a la que se desea llevar a cabo la estimación y de los datos. Para evitar repetir constantemente el subíndice  $\omega_o$  en la respuesta del filtro a diseñar, designaremos éste como el vector  $\underline{a}$ . Note que debería escribirse constantemente  $\underline{a}(\omega_o)$ .

A la hora de establecer el diseño del filtro, en la figura III.11 se ilustra la forma en que la respuesta del filtro en frecuencia multiplica al espectro real. En primer lugar, se ha de establecer que este filtro mida sin distorsión la densidad espectral a la frecuencia central. En otras palabras, la respuesta frecuencial del filtro a la frecuencia central ha de ser la unidad:  $A(\omega_o)=1$ . Esta condición en función de la respuesta impulsional sería la restricción:

$$\begin{aligned}
\underline{a}^H \underline{S} &= 1 \\
\underline{S}^T &= [1 \quad \exp(j\omega_o) \quad \cdots \quad \exp(j(Q-1)\omega_o)]
\end{aligned} \tag{III.57}$$

Por otro lado, por el hecho de que la respuesta frecuencial del filtro no es infinitamente estrecha, tanto su lóbulo principal como los lóbulos laterales introducirán "leakage". Como la respuesta frecuencial está forzada a cero dB. en la frecuencia central, minimizar el "leakage" es equivalente a minimizar la potencia de la salida del filtro. Es decir, dado que se desea medir la potencia en una franja o banda, lo más estrecha posible, la restricción asegura que se llevara a cabo la medida de la potencia alrededor de  $\omega_o$  pero con un "leakage" motivado por dos razones: La primera se debe a que el filtro no es ideal (se construye con solo Q coeficientes y por tanto tendrá unas bandas de transición más o menos abruptas); y la segunda, porque el "leakage" será grande tanto si el filtro tiene unos lóbulos secundarios elevados como si la densidad espectral a medir en las frecuencias de "leakage" es grande (véase la figura III.11). En resumen la condición de mínima potencia a la salida del filtro garantiza su minimización:

$$\underline{a} = \arg \min_{\underline{a}} (\underline{a}^H \underline{R} \underline{a}) \leftrightarrow \text{minimo leakage} \tag{III.58}$$



**Figura III.11. Medida de densidad espectral por filtrado. Filtro paso banda con leakage a otras zonas de frecuencia debido a su ancho de banda finito y a una banda eliminada no ideal.**

Donde la matriz  $\underline{R}$  es la de autocorrelación del proceso:

$$E\{y(n)^2\} = E\{\underline{a}^H \underline{X}_n \underline{X}_n^H \underline{a}\} \tag{III.59}$$

Como se recordara de la sección anterior, una vez diseñado el filtro, el estimador de la potencia del proceso de entrada a la pulsación  $\omega_0$  será:

$$P(\omega_0) = P_y = \underline{a}^H \underline{R} \underline{a} \tag{III.60}$$

y la densidad espectral:

$$S(\omega_0) = \frac{P_y}{B_N} = \frac{\underline{a}^H \underline{R} \underline{a}}{\underline{a}^H \underline{a}} \tag{III.61}$$

esta última, usando de nuevo el ancho de banda equivalente al ruido. Es de destacar que este método es equivalente a usar una ventana o filtro diferente a cada frecuencia de medida y, como puede verse en la expresión del estimador espectral, no es un analizador de ancho de banda constante. Estas expresiones son válidas para cualquier filtro paso banda empleado con tal de que su respuesta este calibrada a cero dB en la frecuencia central  $\omega_0$ . El método, publicado por primera vez por Capon, consiste en elegir un filtro de mínimo leakage a su salida cuando la entrada es x. De aquí los nombres de Método de Capon, Método de Mínima Varianza (MVM) o (mal llamado) Maximum Likelihood Method (MLM).

La minimización consiste en:

$$\begin{aligned} \underline{a}^H \underline{S} \underline{a} &= 1 \\ \underline{a}^H \underline{R} \underline{a} & \Big|_{min} \end{aligned} \tag{III.62}$$

Este problema de minimización con restricciones fue resuelto en el tema I y su solución es

$$\underline{a} = \frac{\underline{R}^{-1} \underline{S}}{\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S}} \quad (\text{III.63})$$

Donde es evidente la dependencia del filtro con la frecuencia a la que se ha diseñado a través del vector  $\underline{S}$ , y con los datos, a través de su matriz de autocorrelación. Nótese que el denominador es un escalar que sirve para normalizar la respuesta de 0 dB a la frecuencia de medida. Llevando esta expresión a (III.61) se obtienen las expresiones del estimador de mínima varianza para la potencia y la densidad espectral:

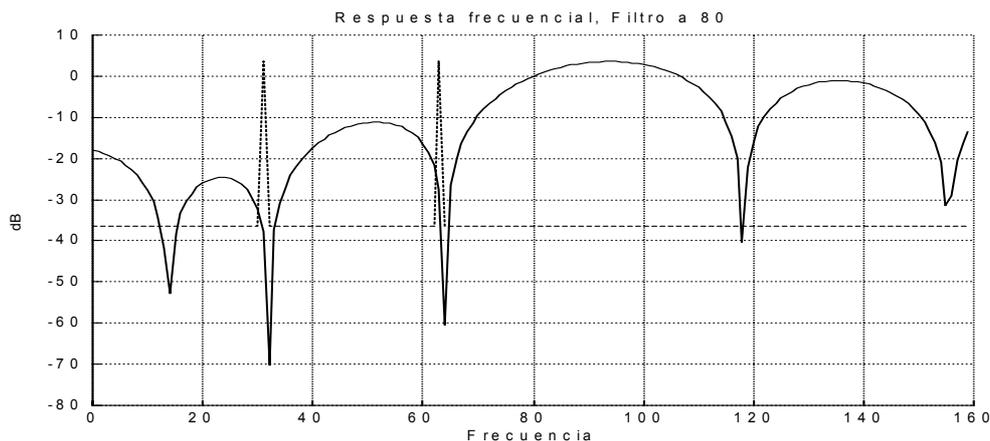
$$P(\omega_o) = \underline{a}^H \underline{R} \underline{a} = \frac{1}{\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S}} \quad (\text{III.64.a})$$

$$S(\omega_o) = \frac{\underline{a}^H \underline{R} \underline{a}}{\underline{a}^H \underline{a}} = \frac{\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S}}{\underline{S}^H \underline{R}^{-2} \underline{S}} \quad (\text{III.64.b})$$

Las ecuaciones (III.64.a) y (III.64.b) constituyen los denominados métodos MLM y MLM normalizado (o NMLM). La figura III.12 muestra la respuesta del filtro a diseñado para medir la densidad espectral de potencia a la frecuencia 76,8 Hz. en una señal que contiene tres sinusoides y ruido blanco. La figura III.13 muestra la estimación de la potencia (obtenida a partir de la ecuación (III.64.a)) y la figura III.14 muestra la estimación de la densidad espectral de potencia (obtenida a partir de la ecuación (III.64.b)). Nótese que en ningún caso es preciso determinar los filtros para cada frecuencia.

En lo sucesivo se van a analizar las propiedades de este estimador. En primer lugar se va a formular el problema de un modo diferente y para un problema, aparentemente, muy específico. No obstante, es esta formulación y el problema analizado los que mejor desvelan las excelentes cualidades del método de análisis espectral. Hasta tal punto es cierto que, incluidos los denominados métodos paramétricos que se presentaran más adelante y que adolecen de limitaciones, se puede decir que NMLM es uno de los mejores métodos de análisis espectral.

En concreto se trata de suponer que el proceso  $x(n)$  está formado por una portadora de envolvente compleja  $\alpha$  y frecuencia  $\omega_o$ , en ruido gaussiano de matriz de correlación  $\underline{R}_n$ . De este modo, la estadística de un vector de datos de  $x(n)$  vendría dado por la ecuación (3.65).



**Figura III.12. Respuesta del filtro óptimo para medir la potencia a la frecuencia de 76,8 de una señal que contiene tres sinusoides en ruido blanco. La señal tiene 1024 muestras y el número de coeficientes del filtro es 11. Nótese como el filtro anula el posible leakage que introducirían las dos sinusoides presentes en la señal. El espectro correcto aparece en línea de puntos.**

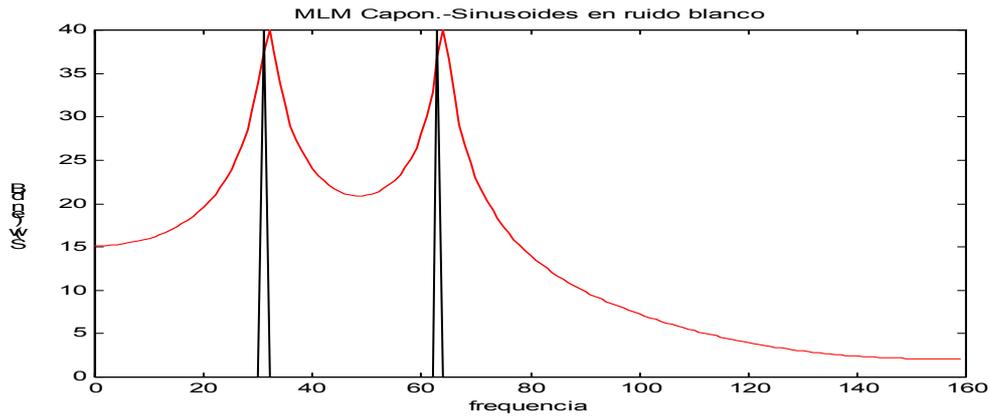


Figura III.13. Estimador de potencia MLM. Filtro de 11 coeficientes para 1024 muestras de señal (Igual a la de los ejemplos anteriores). El espectro correcto esta marcado a puntos y consiste en dos sinusoides en ruido.

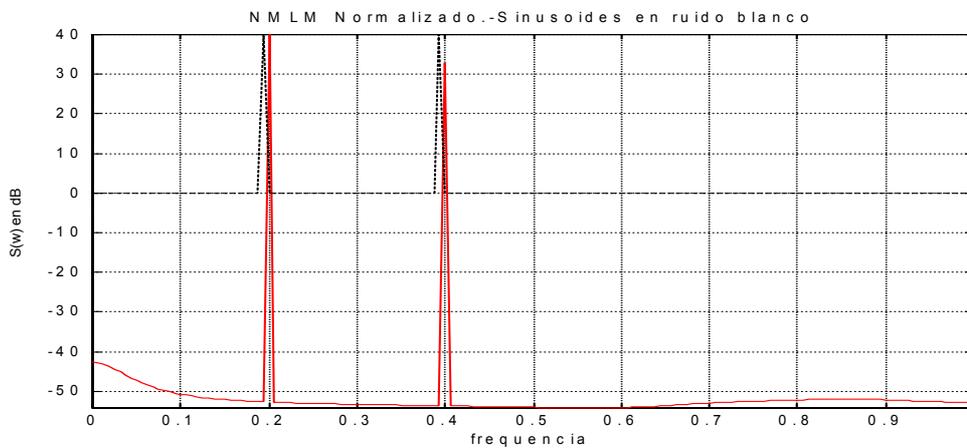


Figura III.14. El estimador NMLM con orden 11 para la misma señal.

$$\underline{X}_n = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-Q+1) \end{bmatrix} = \alpha \exp(jn\omega_o) \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-j\omega_o) \\ \vdots \\ \exp(-j(Q-1)\omega_o) \end{bmatrix} + \underline{\phi}_n$$

$$E\{\underline{X}_n\} = \alpha \exp(jn\omega_o) \underline{S}$$

$$\text{cov}\{\underline{X}_n\} = \underline{R}_n$$
(III.65)

Dado que el factor  $\exp(jn\omega_o)$  no influye en el problema a resolver se omitirá. A partir de estas expresiones, la verosimilitud (recuérdese que es el logaritmo neperiano de la función de densidad de probabilidad del vector dados los parámetros de la portadora) sería:

$$-\Lambda(\alpha, \underline{S}) = (\underline{X}^H - \alpha^* \underline{S}^H) \underline{R}_n^{-1} (\underline{X} - \alpha \underline{S})$$
(III.66)

Si se asume que la frecuencia a la que esta la portadora es conocida y se estima su amplitud, se ha de derivar la expresión anterior con respecto a  $\alpha$  e igualar a cero. Procediendo de este modo, el estimador de máxima verosimilitud de la envolvente compleja es:

$$\hat{\alpha} = \frac{\underline{S}^H \underline{R}_n^{-1} \underline{X}_n}{\underline{S}^H \underline{R}_n^{-1} \underline{S}} = \underline{b}^H \underline{X}_n$$
(III.67)

Esta expresión tiene un parecido extraordinario con la ecuación (III.39). La única diferencia estriba en que la matriz de autocorrelación no es la de los datos sino tan solo la del ruido aditivo o la componente aleatoria de los datos en el modelo elegido de señal. Formulando la matriz de autocorrelación para el modelo (III.65), y usando el lema de la inversa, ver tema I, se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}} &= |\alpha|^2 \underline{\underline{S}} \underline{\underline{S}}^H + \underline{\underline{R}}_n \\ \underline{\underline{R}}^{-1} &= \underline{\underline{R}}_n^{-1} - \frac{|\alpha|^2 \underline{\underline{R}}_n^{-1} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{R}}_n^{-1}}{1 + |\alpha|^2 \underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{R}}_n^{-1} \underline{\underline{S}}} \\ \underline{\underline{R}} \underline{\underline{S}} &= \left( \frac{1}{1 + |\alpha|^2 \underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{R}}_n^{-1} \underline{\underline{S}}} \right) \underline{\underline{R}}_n^{-1} \underline{\underline{S}} \end{aligned} \quad (\text{III.68})$$

donde la última relación prueba que, si bien ambas matrices y sus inversas son diferentes, al multiplicarlas por el vector  $\underline{\underline{S}}$  tan solo difieren en una constante. Como quiera que el producto matriz por vector esta en ambos filtros, podemos concluir que  $\underline{\underline{a}}$  y  $\underline{\underline{b}}$  son iguales.

Dado que el estimador ML es insesgado, consistente y alcanza la cota de Cramer-Rao (véase tema II) se puede decir que el estimador de mínima varianza es el óptimo para la estimación de la potencia de una senoide en cualquier tipo de ruido aditivo gaussiano. Obsérvese que el periodograma era también óptimo cuando el ruido era blanco. Efectivamente, esta propiedad del módulo al cuadrado de la DFT puede evidenciarse cuando la matriz del ruido es una constante por la identidad, como corresponde a ruido blanco. Recuerde que estas expresiones son solo para un vector o segmento, para  $n=0, \dots, N-1$  se habría de promediar estas expresiones y así coincidirían con las de secciones anteriores:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \frac{\underline{\underline{S}}}{\underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{S}}} = \frac{\underline{\underline{S}}}{Q} \\ \underline{\underline{B}}_N &= \underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{A}} = \frac{1}{Q} \\ P(\omega_o) &= \frac{1}{Q^2} \underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{X}}_n \underline{\underline{X}}_n^H \underline{\underline{S}} \\ S(\omega_o) &= \frac{1}{Q} \underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{X}}_n \underline{\underline{X}}_n^H \underline{\underline{S}} \equiv \text{Periodograma} \end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

Es preciso resaltar que el carácter de máxima verosimilitud (y por tanto la optimalidad), se obtiene únicamente cuando la frecuencia central coincide con la de la senoide. Es por esta razón que el nombre de Método de Máxima Verosimilitud (MLM) no es adecuado, a pesar de su uso extendido en la literatura. Aunque complicado, no es muy difícil formular la función de verosimilitud para dos sinusoides en ruido y ver que el óptimo ya no sería el mismo que el que proporciona (III.40) para cualquier frecuencia. A pesar ello, la correcta argumentación en su planteamiento de sesgo y leakage motivan su excelente comportamiento ante cualquier densidad espectral a estimar. Así, por ejemplo, cuando se ha de estimar el espectro de una señal en presencia de una interferencia fuerte, el estimador presenta poco leakage de la interferencia, ya que el filtro, implícito en la formulación del estimador anula prácticamente ésta, a poco que la frecuencia a medir este levemente separada de la interferencia.

Un detalle importante, volviendo a las ecuaciones III.40.a y III.40.b, es que, una vez estimada la matriz de correlación del proceso, el cálculo de la potencia o la densidad espectral en todo el margen de frecuencia conlleva únicamente ir cambiando el valor de la pulsación. Es decir, no se requiere la implementación de ningún banco de filtros sino únicamente programar las dos expresiones anteriores en un bucle donde se va variando la frecuencia que contiene el vector  $\underline{\underline{S}}$ .

Finalmente, se ha de insistir en que la relación con la estimación de máxima verosimilitud, aunque le proporcione al método las siglas (MLM) para potencia y (NMLM) normalizado con el ancho de banda para densidad de potencia, es marginal. Bajo un punto de vista estricto de estimación de

parámetros, aun manteniéndonos en el problema de la estimación ML de la portadora, se ha derivado la expresión del estimador de la amplitud y fase,

$$\hat{\alpha} = \frac{\underline{S}^H \underline{R}_n^{-1} \underline{X}_n}{\underline{S}^H \underline{R}_n^{-1} \underline{S}} \quad (\text{III.70})$$

quedaría aun por determinar su frecuencia. Para ello se ha de introducir la expresión anterior en la expresión de la likelihood. Al hacerlo se llega a la expresión (III.71),

$$-\Lambda(\hat{\alpha}, \underline{S}) = \underline{X}_n^H (\underline{I} - \underline{P})^H \underline{R}_n^{-1} (\underline{I} - \underline{P}) \underline{X}_n \quad (\text{III.71})$$

siendo P un operador de proyección (matriz de rango uno) igual a:

$$\underline{P} = \frac{1}{\underline{S}^H \underline{R}_n^{-1} \underline{S}} \left[ \underline{S} \underline{S}^H \underline{R}_n^{-1} \right] \quad (\text{III.72})$$

La expresión resultante, describe la función que formalmente se ha de maximizar para encontrar el estimador ML de la frecuencia. Es decir, dando valores a la frecuencia, dentro del vector  $\underline{S}$ , para encontrar aquel que maximiza la verosimilitud. En el caso de que la matriz de ruido sea diagonal, el operador se reduce al vector anterior por su transpuesta:

$$\underline{P} = \frac{1}{Q} \left[ \underline{S} \underline{S}^H \right] \quad (\text{III.73})$$

y la función de verosimilitud:

$$-\Lambda(\hat{\alpha}, \underline{S}) = \underline{X}_n^H (\underline{I} - \underline{P})^H (\underline{I} - \underline{P}) \underline{X}_n = \left\| \left( \underline{I} - \frac{\underline{S} \underline{S}^H}{Q} \right) \underline{X}_n \right\|_2 \quad (\text{III.74})$$

Queda al lector el probar que el mínimo de la expresión anterior según la frecuencia es precisamente el máximo del periodograma del segmento como era conocido y de esperar. En cualquier caso, es importante notar que cuando la situación se aparta de ruido blanco, o existe más de una portadora, la complejidad crece mucho y la estimación ML resulta, en muchas ocasiones de poco interés práctico, aunque su calidad sea insuperable.

### III.7. METODOS VARIACIONALES Y ESTIMACION ESPECTRAL PARAMÉTRICA

Todo lo descrito anteriormente esta basado, o puede justificarse en términos de diseño de un banco de filtros. En principio estos filtros pueden hacerse tan estrechos en banda como se desee. Aun así, un filtro de ancho de banda B Hz. lleva asociado un tiempo de transitorio, de duración aproximada 1/B segundos, durante el cual no es posible medir con fiabilidad la potencia de la señal a salida, por lo cual, la máxima resolución espectral no viene limitada por la calidad del filtro diseñado sino más bien por el tiempo durante el que podamos considerar que la señal es estacionaria. Todo ello además con el problema adicional de la varianza y de la necesidad de realizar promedios temporales de medidas de potencia independientes. Es decir, si 1/B es el ancho de banda de análisis, el número máximo de promedios independientes será de N muestras dividido por 1/B. En resumen, el número de promedios independientes, también llamados grados de libertad, es el conocido producto duración por ancho de banda. En conclusión, ante segmentos de muestras de corta duración se esta muy limitado en términos de resolución, y en muchos problemas prácticos la duración de la 'estacionaridad' del proceso no es tan larga como para poder utilizar las herramientas de estimación expuestas hasta ahora, sobre todo si se desea una alta resolución.

Se hace pues necesario el encontrar alguna alternativa, no basada en filtrado, que permita estimar el espectro correctamente, sobre todo en términos de resolución. La primera alternativa parece estar en la idea siguiente: dado un proceso  $\{x\}$  es posible diseñar lo que sería un blanqueador o igualador tal que al aplicarle el proceso  $\{x\}$  a su entrada, la salida fuese ruido blanco. Si fuese fácil diseñar ese filtro blanqueador, por ejemplo exigiendo la máxima incorrelación de su salida, la densidad espectral sería, salvo una constante, el módulo al cuadrado del sistema lineal:

$$\begin{aligned} \phi(n) &= x(n) * h(n) \\ S_{\phi}(\omega) &= \begin{cases} \text{si } \{\phi\} \text{ es blanco} \\ \text{de potencia } \sigma^2 \end{cases} = \sigma^2 = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \end{aligned} \quad (\text{III.75})$$

En el caso de conseguir blanquear la salida, el estimador de la densidad espectral sería el cociente entre la potencia de la salida y el módulo al cuadrado de la función de transferencia. Si el blanqueado no es completo entonces se dispondrá tan solo de un estimador:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{\sigma^2}{|H(\omega)|^2} \quad (\text{III.76})$$

Una manera aproximada de conseguir lo anterior es minimizando la potencia de salida, con alguna restricción que evite la solución trivial (sistema lineal cero). Dejando al margen la posibilidad de construir ese sistema lineal, de la relación anterior puede concluirse que el estimador obtenido está capacitado para producir espectros de una resolución infinita ya que un cero de la función de transferencia en el círculo unidad produciría un pico espectral de altura infinita y ancho cero. En otras palabras, el método evita el principio de incertidumbre ya que con un segmento de duración limitada se puede obtener, al menos en principio, una resolución infinita. Por esta razón los métodos que siguen se denominan súper-resolutivos. No es necesario advertir que lo hacen a costa de una gran varianza y sesgo en la posición estimada.

Anotando su extraordinario potencial en resolución, es preciso dar un soporte más formal a estos métodos. Para ello, se expresa la potencia a la salida del sistema lineal como el área de su espectro:

$$\sigma^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 S(\omega) d\omega = \sigma_{min}^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S(\omega)}{\hat{S}(\omega)} d\omega \quad (\text{III.77})$$

Esta expresión es muy interesante, ya que proporciona una interpretación de la manera en que trabaja el estimador: cuando el espectro verdadero  $S(\omega)$  es cero, el estimador es muy impreciso ya que cualquier estimador  $\hat{S}(\omega)$  escogido no contribuye a la potencia de la salida. Por el contrario, cuando el espectro de la entrada es muy grande, el estimador ha de ajustarse bien pues, de otro modo, la potencia de la salida diferiría mucho del mínimo. En resumen: son estimadores de gran calidad en los máximos del espectro real pero de muy baja calidad en los mínimos. Si se reflexiona sobre esta propiedad, esta bastante de acuerdo con lo que se entiende intuitivamente por gran resolución, que implica el respeto del estimador a los picos del espectro a estimar.

La cuestión que aparece inmediatamente es cuándo se puede considerar que estos métodos son óptimos. Si se recuerda el apartado dedicado a modelos racionales para procesos, en el tema anterior MA, AR y ARMA, es fácil comprender que desarrollar un estimador de la densidad espectral es simplemente resolver el denominado problema inverso. Esto quiere decir, que el estimador espectral de un proceso que sea modelable por un modelo racional es el sistema inverso y su cálculo a partir de los datos ya se presentó en el tema anterior. Otra cosa es que la medida de la correlación o de la respuesta impulsional en el caso ARMA no sea exacta. Del impacto de la calidad de la estimación en el problema inverso se pueden encontrar múltiples referencias cuyo contenido se escapa al objetivo de esta presentación. También puede objetarse que se tiene un desconocimiento de la calidad obtenida al solucionar el problema inverso si no se está seguro de que el proceso admite un modelado racional. La respuesta a la última cuestión se abordará bajo la denominación de métodos variacionales.

Los denominados métodos variacionales o procedimiento variacional es la teoría más amplia para describir cualquier procedimiento de estimación espectral paramétrico o derivar otros nuevos. De hecho, todos los descritos, incluidos los de blanqueado pueden ser descritos en términos de un método variacional. Se denominan métodos variacionales porque su solución se obtiene a partir de un problema variacional, o lo que es equivalente, a una minimización o maximización con restricciones. La presentación se realizará de forma general concentrándose, a modo de ejemplo, en los estimadores denominados de máxima entropía.

A la hora de estimar la función  $S(\omega)$ , el primer punto de partida sería decidir que tipo de función se desea. Una posibilidad es restringir, las infinitas posibilidades para  $S(\omega)$  a aquellas funciones que maximicen la integral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi[\hat{S}(\omega)] d\omega \Big|_{\max} \quad (\text{III.78})$$

donde  $\Phi(\cdot)$  es una función continua y monótona. Esta función es, por decirlo de algún modo, nuestro criterio de ‘belleza’ del estimador, y en el fondo actúa de ‘cosmética’ para el estimador que se pretende obtener. Evidentemente, dentro de este criterio se ha de imponer que mantenga un parecido o proximidad a la densidad espectral de potencia real  $S(\omega)$ . El problema es que el conocimiento que se tiene de  $S(\omega)$  se restringe en general a la información que proporciona el periodograma  $P(\omega)$  de los datos, calculado con WOSA por ejemplo. Así pues, se vinculan propiedades del periodograma al nuevo estimador vía la ecuación (III.79):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\hat{S}(w)) \cdot \exp(-j2\pi qw) \cdot dw = \varphi(q) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(P(w)) \cdot \exp(-j2\pi qw) \cdot dw \quad q = -Q, \dots, Q \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

Ahora se puede establecer el diseño del estimador como aquel que maximiza el objetivo y cumple las  $2Q+1$  restricciones obtenidas del periodograma. Si en algún caso se dispusiese de otra información del espectro correcto, como valores exactos de su autocorrelación en cualquier punto, u otro tipo de información, habría de añadirse dicho conocimiento en forma de restricciones. En definitiva, las restricciones representan el conocimiento previo que se dispone del espectro al comenzar el proceso de estimación.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi[\hat{S}(\omega)] d\omega \Big|_{\max} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi[\hat{S}(\omega)] \exp(jq\omega) d\omega = \varphi(q) \quad q = -Q, \dots, Q \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

La solución del problema anterior pasa por resolver lo que se denomina un problema variacional. De todos modos, cuando ninguna de las dos funciones, la de objetivo y la de las restricciones contiene derivadas de la función, la ecuación del óptimo es justo la derivada del Lagrangiano con respecto a  $S(\omega)$  (III.81) donde los  $\lambda$  corresponden a los multiplicadores para cada restricción:

$$\frac{\partial \Phi(\hat{S})}{\partial \hat{S}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{S}} \sum_{q=-Q}^Q \lambda(q) \exp(jq\omega) = 0 \quad (\text{III.81})$$

Se supone que de la expresión anterior se obtiene una  $S(\omega)$  que es función de  $2Q+1$  parámetros, que son los multiplicadores. Estos parámetros se encuentran obligando que el estimador cumpla las restricciones impuestas en el diseño.

Para poner un ejemplo del método variacional, supóngase que  $\Phi(x) = |x|^2$  y  $\Psi(x) = x$ . En este caso las restricciones son los  $Q$  primeros valores de la autocorrelación y el estimador óptimo verificará (III.82):

$$S(\omega) = \sum_{q=-Q}^Q \lambda(q) \exp(jq\omega) \quad (\text{III.82})$$

Esta solución revela que el estimador óptimo es un modelo MA(Q) para el proceso y los multiplicadores, (ver la ecuación II.79) al llevar la última expresión a las restricciones, son precisamente los valores de correlación. En definitiva, un modelo MA(Q), equivale al método WOSA para segmentos de longitud  $Q$ , es el mejor estimador, en el sentido que minimiza la energía del espectro (el área de su cuadrado, pues la derivada segunda es siempre positiva), sujeto a condiciones de correlación.

Otro planteamiento en la estimación de la densidad espectral de potencia que lleva a un problema variacional es el siguiente: suponiendo que se conocen  $Q+1$  muestras de la función de correlación, ¿qué valores debería tomar el resto de la función de correlación para que la densidad espectral de potencia fuera una función positiva? Planteado de esta forma existen infinitas soluciones al problema. J.P. Burg argumentó que la función de autocorrelación más conveniente sería aquella que hiciera menos suposiciones sobre la señal, y por tanto, debería ser la función de autocorrelación asociada al proceso más blanco posible, fijadas las  $Q+1$  muestras conocidas. Este objetivo se traduce en maximizar la integral del logaritmo del estimador:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(S(\omega)) d\omega \quad (\text{III.83})$$

Esta función se corresponde directamente con la entropía de un proceso gaussiano, por lo que su maximización conlleva el conseguir un estimador de máxima entropía. Al imponer restricciones de correlación, la ecuación del estimador de máxima entropía es:

$$\frac{1}{S(\omega)} - \sum_{q=-Q}^Q \lambda(q) \exp(jq\omega) = 0$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\sum_{q=-Q}^Q \lambda(q) \exp(jq\omega)} = \frac{1}{\left| a(0) + \sum_{q=1}^Q a(q) \exp(jq\omega) \right|^2} \quad (\text{III.84})$$

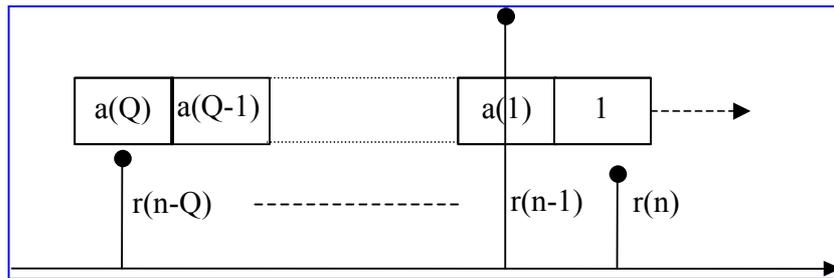
Donde se ha impuesto que los multiplicadores han de ser simétricos respecto al índice y que el polinomio ha de ser factorizable. Si de esta expresión se normaliza el primer coeficiente a la unidad, se obtiene el estimador espectral correspondiente a un modelo AR(Q). Dicho de otro modo, ajustar un modelo AR(Q) a un proceso es equivalente a calcular su estimador de máxima entropía restringido a que la autocorrelación sea conocida hasta el índice  $Q$ . Nótese que este estimador tiene polos por lo tanto puede alcanzar una resolución infinita. El ajuste de los coeficientes  $a(\cdot)$ , con  $a(0)$  igual a la unidad y en el numerador una constante conduce a las denominadas ecuaciones de Yule-Walker. De todos modos para cerciorarse de ello, si se expresa  $R(z)$  como la transformada  $z$  de la función de autocorrelación, especificando que tan solo se conocen los valores  $r(0), \dots, r(Q)$ :

$$R(z) = \sum_{q=-Q}^Q r(q) z^{-q} + \sum_{|q|>Q} r^{(e)}(q) z^{-q} \quad (\text{III.85})$$

donde el súper-índice (e) denota extrapolados o desconocidos a priori, al igualar el estimador para encontrar los parámetros se tendrá (III.86):

$$R(z)A(z) = \frac{k_o}{A^*(1/z^*)} \tag{III.86}$$

En el segundo miembro se tiene una función anticausal (pues se asume que A(z) para ser estable es de fase mínima) que es igual a la convolución de una función para, la de autocorrelación, con una causal, la de A(z). En la figura III.15 puede verse como la convolución de la secuencia a(.) con la de la autocorrelación, en el instante n, maneja los Q+1 valores de correlación que van desde r(n) a r(n-Q). Como esta convolución ha de ser igual a una secuencia anticausal, se puede igualar a cero todos los valores de convolución calculados para n>0. En concreto, como se tienen Q incógnitas se seleccionan los valores n=1,...,Q.



**Figura III.15. Convolución de la secuencia a(q) (q=0,...,Q y a(0)=1), con la función de autocorrelación.**

Las ecuaciones que aparecen en (III.87) son exactamente las ecuaciones de Yule-Walker; nótese que sólo valores conocidos de la autocorrelación aparecen implicados en estas por lo tanto su viabilidad en la practica es completa.

$$\begin{aligned} r(Q) + \sum_{q=1}^Q a(q)r(Q-q) &= 0 & n = Q \\ r(Q-1) + \sum_{q=1}^Q a(q)r(Q-1-q) &= 0 & n = Q-1 \\ \vdots & & \vdots \\ r(1) + \sum_{q=1}^Q a(q)r(1-q) &= 0 & n = 1 \end{aligned} \tag{III.87}$$

El caso de n igual a cero, corresponde a un valor k<sub>o</sub> del segundo miembro de la ecuación, y se corresponde plenamente con la primera ecuación de Y-W:

$$r(0) + \sum_{q=1}^Q a(q)r(q) = k_o \tag{III.88}$$

Con esto queda probado que, efectivamente, solucionar el problema inverso para un modelo AR es idéntico a calcular el estimador espectral de máxima entropía con restricciones de correlación.

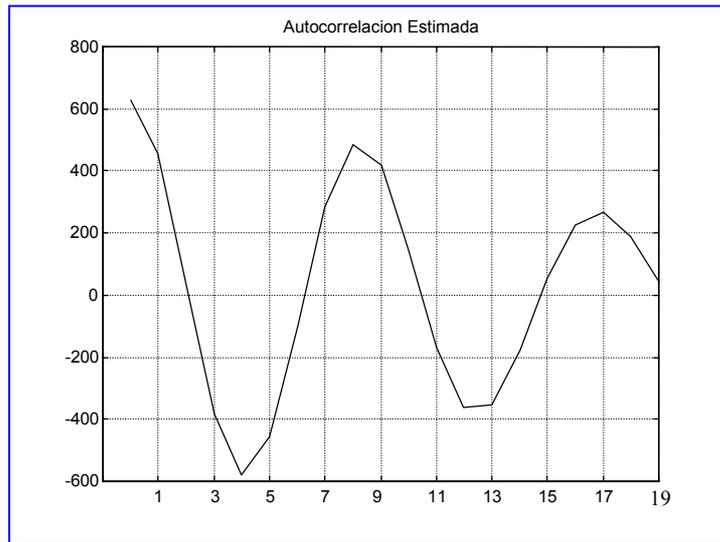
Para evidenciar la calidad del método de máxima entropía, en la figura III.16 se muestra el espectro teórico y el estimado obtenido mediante un ajuste de un modelo AR. El modelo exacto viene dado por la forma en que se generan los datos: ruido gaussiano blanco que se aplica al siguiente sistema:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2.7607.z^{-1} + 3.8106.z^{-2} - 2.6535.z^{-3} + 0.9238.z^{-4}}$$

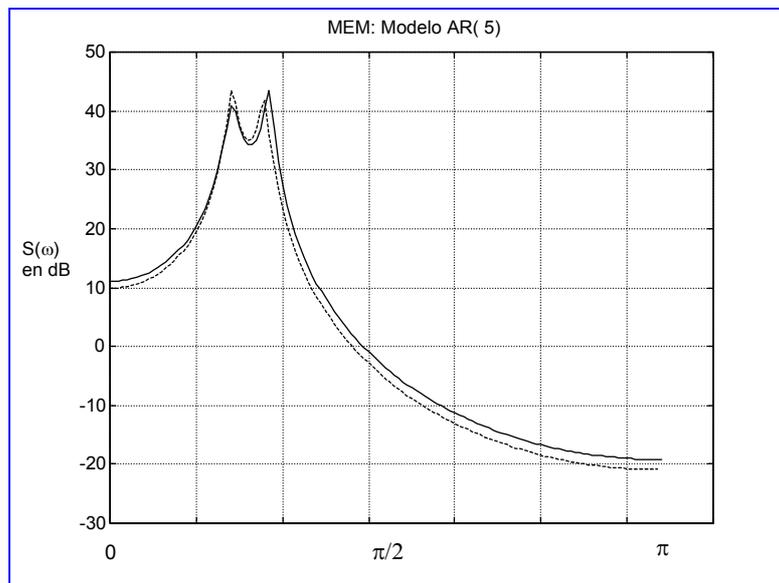
con lo que la densidad espectral exacta será directamente el módulo al cuadrado de dicha función de transferencia. El estimador de la figura se corresponde con 128 puntos de datos, obtenidos a la salida del filtro, el estimador es de orden 4 ( $Q=4$ ) y el método de obtención se basa en estimar varias muestras de la función de autocorrelación vía el estimador insesgado (ver estimador en la figura III.16). Los coeficientes así obtenidos fueron:

$$1, -2.7344, 3.7223, -2.5571, 0.8704$$

La densidad espectral estimada aparece en la figura III.17.



**Figura III.16. Autocorrelación estimada, estimador sesgado, para el proceso AR(5) del texto. Los 5 primeros valores se emplean para derivar el modelo AR y el estimador de Máxima Entropía MEM(4) de la próxima figura.**



**Figura III.17 Estimador MEM de orden 5 para proceso AR de orden 5 a partir de la autocorrelación estimada por el estimador insesgado, mostrada en la figura anterior.**

Por ultimo, para observar la flexibilidad del planteamiento variacional, se describirá una situación con dos conjuntos simultáneos de restricciones. En concreto, se usaran restricciones de correlación (transformada de Fourier inversa del periodograma) y de cepstrum (transformada de Fourier inversa del logaritmo neperiano del periodograma). Las restricciones simultáneas son:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) \exp(jq\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [P(\omega)] \exp(jq\omega) d\omega = r(q) \quad q = -Q, \dots, Q$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Ln}[S(\omega)] \exp(jq\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Ln}[P(\omega)] \exp(jq\omega) d\omega = c(q) \quad q = -Q, \dots, Q; q \neq 0$$

unidas al criterio de máxima entropía, producen un modelo ARMA para  $S(\omega)$ , donde los multiplicadores que forman el numerador obedecen a las restricciones de cepstrum y los del denominador a las de correlación. En este caso, el lector puede comprobar que la solución del problema inverso no se corresponde con el planteamiento de Máxima Entropía con restricciones de cepstrum y correlación. En el apartado III.7.2 se completara este procedimiento.

Por último, se ha de justificar el nombre de estimación espectral paramétrica, más extendido que el de métodos variacionales. La razón se refiere a que tanto el estimador como el coste computacional se concentran en el cálculo de un conjunto de parámetros, los multiplicadores, que son los que caracterizan completamente el espectro. Es de destacar que el método más popular por su calidad en resolución y su baja complejidad es el de máxima entropía (MEM) con restricciones de correlación. Su resolución es siempre superior a MLM, si bien es más que discutible su valor frente a NMLM cuando el proceso bajo análisis no es AR.

Si bien no existe una relación entre NMLM y MEM, es fácil de encontrar entre MEM y MLM. Esta relación está basada en el hecho de que los coeficientes de un modelo AR pueden expresarse, como se verá en el próximo capítulo, como el resultado de pedir mínima potencia de salida con la restricción de primer coeficiente igual a la unidad. De este modo, el inverso del estimador MLM de orden  $Q$  puede escribirse como:

$$\frac{1}{S_Q^{MLM}(\omega)} = \underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S} \quad (\text{III.89})$$

donde el vector  $\underline{S}$  contiene, como es habitual los fasores con la frecuencia a la que se calcula el estimador. Por otra parte, la inversa de la matriz de autocorrelación, se puede expresar en función de los coeficientes de un modelo AR calculados para órdenes sucesivos:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_Q(1) & a_Q(2) & \dots & a_Q(Q) \\ 0 & 1 & a_{Q-1}(1) & \dots & a_{Q-1}(Q-1) \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{Q-2}(Q-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_o^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \sigma_{Q-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_Q^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.90})$$

$$\underline{R}^{-1} = \underline{A} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{A}^T$$

Al sustituir en la expresión anterior:

$$\frac{1}{S_{MLM}^Q(\omega)} = \underline{S}^H \underline{A} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{A}^H \underline{S} = \sum_{q=0}^Q \frac{1}{\sigma_q^2} \left| \sum_{m=0}^q a_q(m) \exp(-j\omega m) \right|^2 = \sum_{q=0}^Q \frac{1}{S_{MEM}^q(\omega)} \quad (\text{III.91})$$

Lo cual permite concluir que la inversa del estimador de potencia MLM es la suma de la inversa de los estimadores MEM de órdenes sucesivos. Esta relación permite también establecer que, con toda seguridad, la resolución del estimador MEM de orden Q es mayor que MLM del mismo orden, debido a las contribuciones de estimadores MEM de órdenes inferiores y por tanto de menor resolución (ver figura III.18).

### III.7.1 ESTIMACION ARMA: METODO DE DURBIN.

Uno de los procedimientos más efectivos para la estimación de modelos ARMA (incluidos MA puros) es el método debido a Durbin. La idea básica es obtener una estimación de la secuencia de entrada al modelo y que produjo la señal observada. Denominando  $x(n)$  ( $n=0, N-1$ ) a la señal observada, Durbin propuso emplear un predictor de orden alto, al menos el doble del número de ceros del modelo, para producir el estimador de la secuencia de entrada  $e(n)$ . De este modo el primer paso es el cálculo de un predictor lineal sobre  $x(n)$ . Se recomienda usar el método de Burg basado en la red en celosía y con errores "forward" y "backward" por ser el que mejores resultados proporciona. Una vez obtenidos los coeficientes del predictor largo, digamos que de orden  $N_c$ , se procede a obtener el estimador de la secuencia de entrada al modelo  $e(n)$  según se indica:

$$e(n) = x(n) + \sum_{q=1}^{N_c} a_L(q) \cdot x(n-q) \quad n = N_c, N_f \quad (\text{III.92})$$

Donde  $a_L(\cdot)$  denota los coeficientes del predictor largo.

Nótese que la secuencia de entrada estimada no debe incluir ni el pre ni el post-transitorio. Esta es la razón por la que en la fórmula anterior se hace correr el índice desde  $N_c$  hasta  $N_f$ , donde este último es menor que  $N$ , la longitud de la secuencia observada  $x(n)$ .

Una vez se dispone de la secuencia de entrada y la secuencia de salida se procede a identificar los parámetros del modelo ARMA. Para ello note que la relación que existiría sería la siguiente:

$$x(n) = \sum_{p=0}^P b(p) \cdot e(n-p) - \sum_{q=1}^Q a(q) \cdot x(n-q) \quad (\text{III.93})$$

Siendo  $a(\cdot)$  los coeficientes del denominador y  $b(\cdot)$  los coeficientes del numerador.

Para resolver la identificación de los coeficientes es mejor asumir, sin limitar por ello la formalidad del desarrollo, que los dos primeros coeficientes de numerador y denominador son la unidad. De este modo, usando la formulación vectorial, puede escribirse:

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= [a(1), \dots, a(Q), 1, b(1), \dots, b(P)]. \\ [-x(n-1) \quad \dots \quad -x(n-Q) \quad e(n) \quad e(n-1) \quad \dots \quad e(n-P)]^T &= \\ &= \underline{c}^H \cdot \underline{Y}_n \end{aligned} \quad (\text{III.94})$$

Ahora el vector de coeficientes  $\underline{c}$ , que contiene los del modelo ARMA, puede calcularse por mínimo error cuadrático, es decir, minimizando el error cuadrático entre la salida que produce el modelo  $\hat{x}(n)$  y la señal observada  $x(n)$ . Antes de minimizar el error, se formulara la salida del filtro de forma vectorial como sigue:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{x}(N_c), \hat{x}(N_c+1), \dots, \hat{x}(N_f) \right] &= \underline{c}^H \cdot \left[ \underline{Y}_{N_c}, \underline{Y}_{N_c+1}, \dots, \underline{Y}_{N_f} \right] \\ \underline{\hat{x}} &= \underline{c}^H \cdot \underline{Y} \end{aligned} \quad (\text{III.95})$$

De este modo, la minimización del error cuadrático se reduce a (III.96).

$$\xi = (\underline{x} - \underline{\hat{x}})^H \cdot (\underline{x} - \underline{\hat{x}}) = (\underline{x}^H - \underline{Y}^H \cdot \underline{c}) \cdot (\underline{x} - \underline{c}^H \cdot \underline{Y}) \quad (\text{III.96})$$

Derivando con respecto a  $\underline{c}^H$  se obtiene:

$$(\underline{x}^H - \underline{Y}^H \cdot \underline{c}) \cdot \underline{Y} = \underline{0} \quad \underline{c} = (\underline{Y}^H \cdot \underline{Y})^{-1} \cdot (\underline{x}^H \cdot \underline{Y}) \quad (\text{III.97})$$

Que permite obtener los coeficientes. Finalmente, el estimador se completa estimando la potencia de la señal de entrada al modelo como la potencia de la secuencia  $e(n)$  obtenida del predictor largo.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_f - N_c} \cdot \sum_{n=N_c}^{N_f} |e(n)|^2 \quad (\text{III.98})$$

El método expuesto se considera el de menor complejidad pero no es el de mas calidad como podrá verse en la siguiente sección.

Para mostrar el comportamiento del método de Durban se ha seleccionado un proceso ARMA formado como la respuesta a ruido blanco del siguiente modelo de 4 ceros y cuatro polos:

Coefficientes Numerador

$$B(z) = 1.0000 + 0.5827 \cdot z^{-1} + 1.0873 \cdot z^{-2} + 0.5844 \cdot z^{-3} + 0.9413 \cdot z^{-4} \quad (\text{III.99})$$

Coefficientes Denominador

$$A(z) = 1.0000 - 2.8783 \cdot z^{-1} + 3.9839 \cdot z^{-2} - 2.7959 \cdot z^{-3} + 0.9413 \cdot z^{-4}$$

La figura que sigue reproduce la densidad espectral exacta de la señal ARMA.

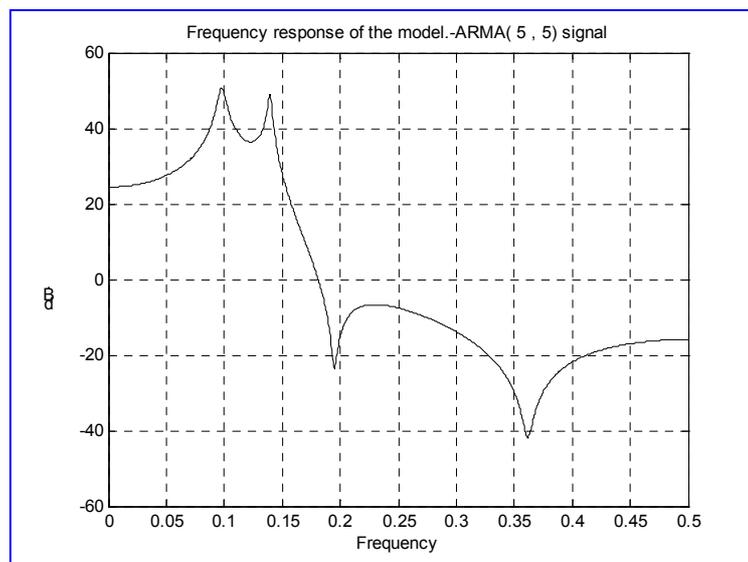
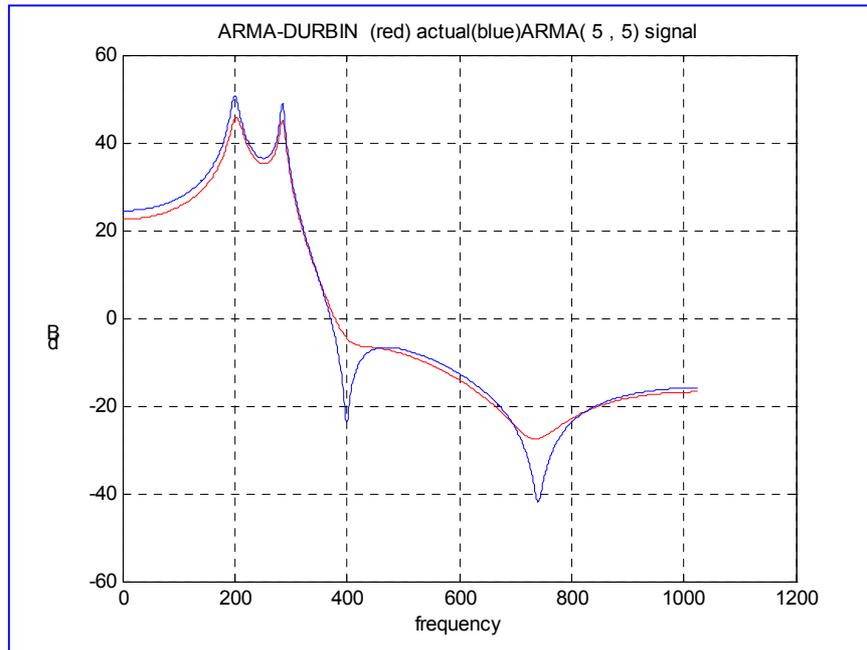


Figura III.18. Densidad espectral del modelo ARMA con potencia de ruido de entrada unidad y coeficientes iguales a (III.99)

El correspondiente estimador de esta densidad espectral siguiendo el método de Durban expuesto aparece en la figura siguiente, para una longitud de la señal de entrada de 256 muestras.



**Figura III.19. Estimador de Durban en rojo y densidad correcta en azul para 256 muestras de señal de entrada.**

Como puede verse la calidad del estimador es bastante buena. No obstante, esta calidad la superar el estimador que sigue en la próxima sección. El mayor problema de Durban estriba en la fase de selección del predictor largo, dicho predictor hace decrecer la varianza de la secuencia de entrada  $e(n)$  a medida que se incrementa el orden. Este efecto del orden del predictor largo perjudica la adecuada localización de los ceros del estimador, además, en ciertos casos le hace fluctuar varios dB lo que viene a decir que el estimador de Durban tiene un sesgo apreciable y un problema en la localización de ceros próximos al círculo unidad. Como se ha comentado ambos efectos desaparecen en el estimador que sigue.

**III.7.2. ESTIMACIÓN ARMA: LAST.**

Desarrollado por P. Stoica y uno de los autores de las presentes notas, LAST es sin ninguna duda el mejor procedimiento de análisis espectral paramétrico conocido.

El procedimiento usa de la cualidad de que conocido un estimador de la matriz de auto correlación del proceso de orden igual a número de polos  $\underline{\underline{R}}$  ( $nq, nq$ ), siendo  $nq$  el orden del denominador del estimador, y puntos de la respuesta impulsional del modelo, agrupados en la matriz  $\underline{\underline{H}}$  según se indica en (III.100). Note que como los primeros coeficientes se asumen igual a la unidad, también  $h(0)$  es la unidad en esta expresión.

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{np} & \dots & h_1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{tamaño } (np, nq) \quad \text{(III.100)}$$

Donde  $np$  es el orden del numerador del modelo, entonces (Ver capítulo II de estas notas) los coeficientes del modelo pueden obtenerse de ambas matrices.

Lo que sigue tiene relación con lo explicado en el capítulo II en el apartado de modelos ARMA, se recomienda al lector revisar dicho apartado antes de proseguir.

Dado que la denominada  $R(z)$  puede escribirse como (III.101).

$$R(z) = \sigma^2 \cdot \frac{B(z)}{A(z)} \cdot \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \sigma^2 \cdot H(z) \cdot H(z^{-1}) \quad (\text{III.101})$$

La expresión anterior se completa con la respuesta impulsional en función de ambos conjuntos de coeficientes.

$$\frac{B(z)}{A(z)} = H(z) \quad (\text{III.102})$$

Esta última ecuación muestra que dados los coeficientes del denominador los coeficientes del numerador se obtendrían directamente de (III.103), lo que reduce el problema al cálculo de los coeficientes del denominador.

$$\underline{b} = \underline{H} \cdot \underline{a} \quad (\text{III.103})$$

Volviendo a la ecuación III.101 nótese que esta puede escribirse como (III.104.a), o bien, en su versión temporal como (III.104.b).

$$R(z) \cdot A(z) = \sigma^2 \cdot H(z^{-1}) \cdot B(z) = \sigma^2 \cdot H(z) \cdot H(z^{-1}) \cdot A(z) \quad (\text{III.104.a})$$

$$\underline{R} \cdot \underline{a} = \sigma^2 \cdot \underline{H} \cdot \underline{H}^H \cdot \underline{a} \quad (\text{III.104.b})$$

Es decir, el problema del cálculo del denominador y de la potencia de la señal de entrada se reduce a un problema de autovalores generalizados. La cuestión es de todos los autovalores de (III.104.b), y los correspondientes autovectores cual es el que interesa. La respuesta tiene relación con la entropía del estimador. Fijando los primeros coeficientes de numerador y denominador a la unidad,  $\sigma^2$  es precisamente la entropía del estimador resultante. Así pues para máxima entropía interesaría el autovalor más grande. Por otro lado, se puede probar que la diferencia (III.105) ha de ser positiva,

$$\underline{a}^H \cdot \left( \underline{R} - \sigma^2 \cdot \underline{H} \cdot \underline{H}^H \right) \cdot \underline{a} \geq 0 \quad (\text{III.105})$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \underline{R} - \sigma^2 \cdot \underline{H}^T \cdot \underline{H} \geq 0 &\Leftrightarrow \underline{I} - \sigma^2 \cdot \underline{R}^{-1/2} \cdot \underline{H}^T \cdot \underline{H} \cdot \underline{R}^{1/2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sigma^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{\max} \left( \underline{R}^{-1/2} \cdot \underline{H}^T \cdot \underline{H} \cdot \underline{R}^{1/2} \right)} = \frac{1}{\lambda_{\max} \left( \underline{H} \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{H}^T \right)} \end{aligned} \quad (\text{III.106})$$

Es decir, la máxima entropía del estimador se corresponde con el mínimo autovalor de (III.104.b) lo que soluciona el problema del estimador. Básicamente, dadas las matrices de correlación y respuesta impulsional, basta resolver (III.104.b) para el autovalor y autovector mínimo, normalizando el primer valor del autovector a la unidad, es decir, dividiendo el autovector por su primera componente y multiplicando el autovalor por el mismo valor. Una vez obtenido la potencia y el denominador, la ecuación (III.100) permite obtener el numerador.

El problema que resta es como encontrar la respuesta impulsional del modelo a usar en la matriz  $\underline{H}$ . La respuesta ha de volver al método ARMA de máxima entropía expuesto al principio de este apartado III.7. Si se dispone de los  $n_p$  primeros valores del cepstrum  $c_1, \dots, c_{n_p}$  entonces puede derivarse una respuesta impulsional de fase mínima para el espectro del proceso. Note que la respuesta impulsional que se derivara no se corresponderá con la verdadera salvo que todos los ceros estén dentro del círculo

unidad, es decir, salvo que el modelo de verdad sea de fase mínima. No obstante, a efectos de estimación espectral la fase no importa y ambas respuestas producen el mismo resultado.

Para derivar la respuesta impulsional de los valores del cepstrum, nótese que la definición del cepstrum es la transformada inversa del logaritmo natural de la densidad espectral.

$$C(z) = Ln[R(z)] = Ln(\sigma^2) + Ln[\underline{H}(z)] + Ln[H(z^{-1})] \quad (III.107)$$

Claramente, con  $h(0)$  igual a la unidad,  $c_0$  es igual al logaritmo de la potencia, es decir, la entropía del modelo es precisamente el logaritmo natural de la potencia del ruido blanco a la entrada del modelo. Además la expresión anterior revela que la parte causal del cepstrum esta relacionada con  $H(z)$ .

$$C^+(z) = 0.5Ln(\sigma^2) + Ln[H(z)] \quad (III.108)$$

Derivando esta expresión se obtiene (III.109.a) y su versión temporal (III.109.b).

$$\partial C^+ = \frac{\partial H}{H} \quad ; \quad \partial C^+ . H = \partial H \quad (III.109.a)$$

$$n.c(n) * h(n) = n.h(n) \quad (III.109.b)$$

Esta ultima ecuación permite obtener  $h(n)$  de los valores del cepstrum según se indica a continuación:

$$h_n = \frac{1}{n} \cdot \left[ \sum_{q=1}^n q.c_q . h_{n-q} \right] \quad n = 1, \max(np, nq) \quad \text{con } h_0 = 1 \quad (III.110)$$

Lo que completa el calculo de la respuesta impulsional de fase mínima dados los primeros valores del cepstrum.

Para el calculo del cepstrum a partir de los datos, una solución seria estimar el periodograma de los datos, tomar logaritmo natural del periodograma y, por ultimo, calcular la IDFT de este. El problema de este método es que el periodograma y en general cualquier estimador tiende a cubrir con "leakage" de los polos las zonas de baja energía de los ceros. Es decir, las zonas de alta energía de los polos del modelo enmascaran las zonas de baja energía de los ceros. Este fenómeno, mas evidente con polos y ceros próximos al circulo unidad y próximos en frecuencia, hace que el cepstrum calculado sea de baja calidad y la respuesta impulsional derivada este muy distorsionada con respecto a la correcta (básicamente esta mucho mas amortiguada que la real).

Un procedimiento alternativo, el de mas calidad, es recurrir a la expresión derivada por V. Pisarenko. Dicha expresión comenta que el espectro correcto es siempre el limite de la expresión (III.111). Esta expresión será utilizada de nuevo mas adelante. La función  $f(\cdot)$  puede ser cualquiera que sea monótona creciente o decreciente.

$$S(\omega) = \lim_{Q \rightarrow \infty} f^{-1} \left( \frac{S^H f(\underline{R}) S}{Q} \right) \quad (III.111)$$

Cuando  $Q$ , el orden, se mantiene finito, se tendría un estimador del espectro.

$$\hat{S}(\omega) = f^{-1} \left( \frac{S^H f(\underline{R}) S}{Q} \right) \quad (III.112)$$

Tomando el logaritmo natural como función  $f(\cdot)$ , se obtiene una expresión alternativa para derivar el cepstrum sin la necesidad de pasar al dominio frecuencial, directamente desde la matriz de auto correlación.

$$\hat{S}(\omega) = \exp^{-1} \left( \frac{\underline{S}^H \underline{Ln}(\underline{R}) \underline{S}}{Q} \right) \Rightarrow C(w) = \frac{\underline{S}^H \underline{Ln}(\underline{R}) \underline{S}}{Q} \quad (\text{III.113})$$

Es decir que el logaritmo de la matriz de auto correlación es similar a lo que podría denominarse la matriz de cepstrum. Un estimador de este puede entonces derivarse de sumar por diagonales la matriz del logaritmo de la matriz de auto correlación. Recuerde que el logaritmo de una matriz es otra matriz con los mismos autovectores y autovalores iguales al logaritmo de los autovalores originales. De este modo, el estimador será:

$$\text{Si } \underline{R} = \underline{U} \cdot \text{diag}(\lambda) \cdot \underline{U}^H \quad \text{entonces} \quad \underline{LnR} = \underline{U} \cdot \text{diag}(\underline{Ln}\lambda) \cdot \underline{U}^H \quad (\text{III.114})$$

Sumando por diagonales la matriz  $\underline{LnR}$  se obtienen los valores del cepstrum estimados. Con el fin de que el cepstrum capture correctamente el efecto de polos y ceros conviene que el orden de la matriz de auto correlación sea lo mas grande posible sin provocar que el estimador sea de rango deficiente. Se recomienda el uso del numero de muestras de señal disponibles dividido por dos para el orden de la matriz en la expresión anterior.

Con respecto a la matriz de auto correlación, no solo para este estimador sino para todos los expuestos, se recomienda usar la versión "forward" y "backward" del estimador. Esta versión promedia los productos de rango uno en orden normal mas los mismos productos en orden inverso. La formulación del estimador normal es (III.115.a). Este estimador seria el denominado "forward". El "backward" añadiría también los vectores dados la vuelta, operación indicada con la matriz  $\underline{\Pi}$ , resultando en el estimador (III.115.c).

$$\underline{\tilde{R}} = \frac{1}{N_f - N_c + 1} \sum_{n=N_c}^{N_f} \underline{X}_n \cdot \underline{X}_n^H \quad (\text{III.115.a})$$

$$\underline{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \dots & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.115.b})$$

$$\underline{\hat{R}} = (\underline{\tilde{R}} + \underline{\Pi} \cdot \underline{\tilde{R}} \cdot \underline{\Pi}) / 2 \quad (\text{III.115.c})$$

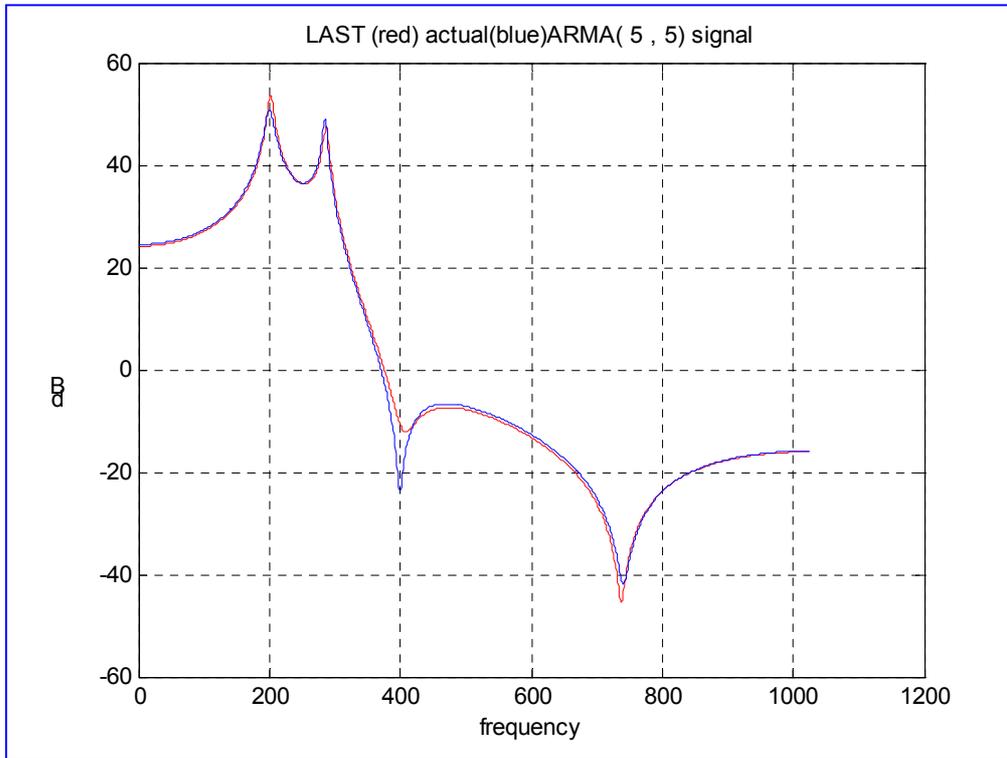
Este estimador de la matriz de auto correlación es absolutamente el mejor. Se deja al lector las razones que soportan esta afirmación, vinculadas al carácter estacionario de las señales bajo análisis.

Un resumen del método LAST sigue a continuación:

- a.- Estimar con (III.115) dos matrices de auto correlación. Una de orden  $n_q$  (denominador del estimador) y otra con tamaño  $N/2$  siendo  $N$  el numero de muestras de la señal de entrada.
- b.- Usar sobre la segunda matriz (III.114) y sumando por las subdiagonales desde la primera subdiagonal a la subdiagonal  $n_p$  y dividiendo por  $N/2$  estimar los valores de cepstrum.
- c.- Usar (III.110) y (III.100) para obtener la respuesta impulsional de fase mínima y su matriz de Haenkel correspondiente.
- d.- Resolver (III.104.b) para el autovalor y autovector mínimo. Obtendrá la potencia del ruido de entrada y el denominador del modelo ARMA. Normalice para primer coeficiente unidad.
- e.- Calcule el numerador usando la ecuación (III.103).

f.- Calcule el estimador espectral usando  $\hat{S}_{LAST}(w) = \sigma^2 \cdot \frac{|B(e^{jw})|^2}{|A(e^{jw})|^2}$

La calidad de este nuevo estimador, para el mismo caso que fue empleado en la subseccion anterior para el caso de Durbin, puede verse en la figura que sigue. Nótese que a pesar de la gran dinámica, casi 100 dB., la calidad del procedimiento es muy grande y no igualable por ningún otro procedimiento.



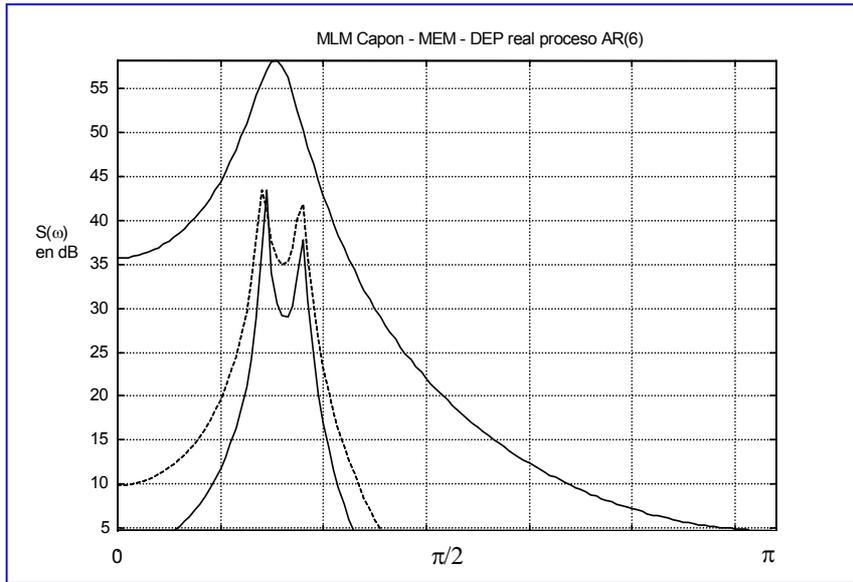
**Figura III.20. Estimador LAST en rojo versus al correcto en verde para 256 muestras de una señal ARMA.**

### III.8. DETECTORES DE FRECUENCIA: MUSIC

Los métodos de análisis espectral o estimación espectral tienen por objetivo, como su nombre indica el cálculo, lo más próximo a la realidad, de la distribución de la potencia de un proceso en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, en la mayor parte de las aplicaciones, la parte del espectro buscado son los picos, por indicar elevadas concentraciones de potencia en estrechos márgenes de frecuencia. Es más, su altura carece muchas veces de importancia si lo que se pretende es conocer con precisión su localización: a menudo se está más interesado en la detección de picos espectrales que en la densidad espectral en su globalidad. Cuando el procedimiento está orientado a esta tarea, aunque puede considerársele un estimador espectral, se denomina detector de frecuencias.

Para el diseño, y evaluación de un detector de frecuencias, la mejor señal es el proceso formado por la suma de varias sinusoides, habitualmente con sus componentes en fase y cuadratura, complejas en ruido, que supondremos blanco. Más adelante, se analizarán las modificaciones que un detector basado en ruido blanco requiere cuando se está en presencia de ruido coloreado. El modelo tendría la siguiente expresión:

$$x(n) = \sum_{s=1}^{N_s} \alpha_s \exp(jn\omega_s) + w(n) \quad (\text{III.116})$$



**Figura III.21. Estimaciones realizadas sobre un proceso AR de orden 2 usando distintos estimadores. En la figura aparecen de arriba hacia abajo, el estimador MLM, la verdadera densidad espectral de potencia y el estimador MEM. El hecho de que MLM sea un promedio de MEM de órdenes sucesivos justifica, en cierto modo, su menor resolución. El MEM está mejor adaptado a procesos AR.**

Donde  $w(n)$  es ruido blanco de potencia  $N_o$  y  $(\alpha_s w_s)$  son las amplitudes y pulsaciones de las sinusoides. Si se selecciona un segmento de tamaño  $Q$  mayor que el número de sinusoides  $N_s$ , omitiendo el factor correspondiente a la portadora, se puede escribir como se indica en (III.71). Nótese que el factor de portadora (la exponencial compleja), al trabajar con funciones de autocorrelación desaparecerá por lo cual se seguirá la presentación con la segunda expresión de (III.71):

$$\underline{X}_n = \sum_{s=1}^{N_s} \alpha_s \exp(jn\omega_s) \underline{S}_s + \underline{w}_n \tag{III.117}$$

$$\underline{X}_n = \sum_{s=1}^{N_s} \alpha_s \underline{S}_s + \underline{w}_n$$

La matriz de correlación, estimada o exacta del proceso, considerando el ruido incorrelado y que el número de promedios es suficiente para que la correlación cruzada de las sinusoides tienda a cero, pasa a ser (III.118). Es preciso destacar que el número de promedios requerido para que dos sinusoides de frecuencia diferente anulen su correlación cruzada es del orden de la inversa de la menor diferencia entre dos frecuencias contenidas en la señal. Por ejemplo, si dos frecuencias están separadas en 0.01, se requieren 100 muestras al menos para que su correlación cruzada en el estimador sea despreciable.

$$\underline{\underline{R}} = \sum_{s=1}^{N_s} |\alpha_s|^2 \underline{S}_s \underline{S}_s^H + N_o \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{R}}_S + N_o \underline{\underline{I}} \tag{III.118}$$

La matriz de correlación tiene claramente diferenciadas las contribuciones de señal y ruido. Lo más interesante de la contribución de señal es que esta formada por  $N_s < Q$  matrices de rango uno y por lo tanto, siendo una matriz de dimensión  $Q$ , es de rango deficiente ya que su rango es  $N_s$ . Además, si se es capaz de estimar el rango de la contribución de señal se podrá estimar el número de sinusoides que contiene el proceso bajo análisis. Si se escribe esta situación de rango deficiente en términos de autovalores y autovectores, se obtiene:

$$\underline{\underline{R}}_s \underline{e}_{s,q} = \lambda_{s,q} \underline{e}_{s,q} \quad q = 1, \dots, N_s$$

o bien

(III.119)

$$\underline{\underline{R}}_s = \sum_{q=1}^{N_s} \lambda_{s,q} \underline{e}_{s,q} \underline{e}_{s,q}^H$$

Es claro que de los  $Q$  autovectores de la matriz de autocorrelación  $N_s$  estarán condicionados por la señal solamente, y el resto  $Q-N_s$  serán los que la matriz de ruido, de rango completo, añade a los anteriores. Para ser más específicos, veamos que los autovectores del espacio de señal, el definido por (III.119), efectivamente son autovectores de la matriz de auto correlación de la señal.

$$\underline{\underline{R}}_s \underline{e}_{s,q} = \underline{\underline{R}}_s \underline{e}_{s,q} + N_o \underline{I} \underline{e}_{s,q} = (\lambda_{s,q} + N_o) \underline{e}_{s,q} \quad q = 1, \dots, N_s$$
(III.120)

Si este resultado es interesante, más crucial es la estructura del resto de autovectores y autovalores. Pensando en el siguiente autovector (el de índice  $N_s+1$ ), este ha de ser ortogonal a todos los anteriores y en consecuencia es ortogonal a la matriz  $\underline{\underline{R}}_s$ , por lo que verificara (III.121):

$$\underline{\underline{R}}_s \underline{e}_{w,q} = \underline{\underline{R}}_s \underline{e}_{w,q} + N_o \underline{I} \underline{e}_{w,q} = N_o \underline{e}_{w,q} \quad q = N_s + 1, \dots, Q$$
(III.121)

El conjunto de autovectores con autovalor igual proporciona en primer lugar un estimador del número de sinusoides presentes que es el orden de la matriz  $Q$  menos el número de autovalores iguales o parecidos. En segundo lugar, todo estos autovectores son ortogonales a las señales, luego si se dibuja su respuesta en frecuencia todos ellos tendrán ceros a las frecuencias donde esta la señal. En otras palabras, un detector de las posiciones donde se encuentran las sinusoides sería el denominado estimador MUSIC:

$$S_{MUSIC}(\omega) = \frac{1}{\sum_{q=N_s+1}^Q |S^H \underline{e}_q|^2}$$
(III.122)

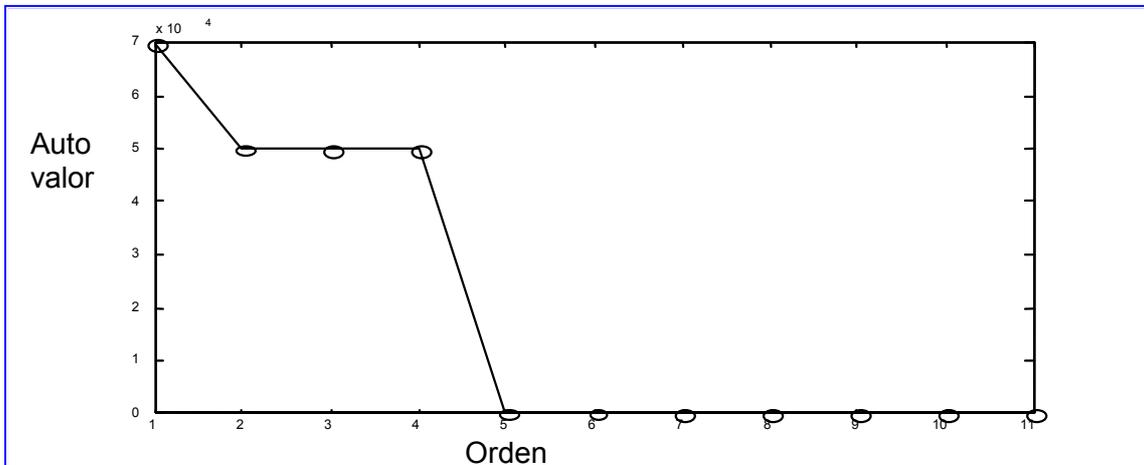
Se debe insistir en que es un localizador de picos espectrales y por lo tanto su magnitud no es una estimación fiable de la densidad espectral de potencia y ha de recurrirse al método MLM en las frecuencias donde se ha producido la detección. Existe en la literatura un procedimiento, pionero en los trabajos de análisis espectral debido a Pisarenko, en el que se propone tan solo el autovector asociado al autovalor mínimo. El problema de usar solo un autovector (es un vector de  $Q$  elementos) es que el polinomio asociado tiene  $Q-1$  raíces. De estas  $Q-1$  raíces,  $N_s$  son verdaderas y corresponden a las frecuencias de señal mientras que el resto son falsas, por lo cual se precisa procesar posteriormente con MLM o WOSA para encontrar las correctas. La ventaja de MUSIC es que todos los autovectores del subespacio de ruido tienen  $Q-1$  raíces, pero tan solo coinciden todos en las  $N_s$  correctas. De hecho MUSIC ha dejado prácticamente en desuso el método de Pisarenko. Nótese también que, usando Music, con segmentos de longitud  $Q$  muestras, no pueden detectarse más de  $Q-1$  sinusoides complejas.

En la práctica, cuando la matriz de autocorrelación se estima de los datos, es difícil encontrar cuando los autovalores dejan de decrecer y pasar a ser casi constantes (ver figura III.16). Además, la proximidad de dos frecuencias hace que el último autovalor de señal difiera en tan solo algunas cifras decimales del primer autovalor de ruido. En cualquier caso, MUSIC es el mejor método de los expuestos en resolución de sinusoides en ruido blanco si se conoce el número de estas.

En el caso de que la matriz de ruido no sea diagonal el método requiere del conocimiento de la matriz de ruido  $\underline{\underline{N}}$ . Los autovectores de ruido son los asociados a los  $Q-N_s$  autovalores más pequeños del siguiente problema:

$$\underline{\underline{R}}_q \underline{e}_q = \lambda_q \underline{N} \underline{e}_q \quad q = N_s + 1, \dots, Q$$
(III.123)

Antes de pasar a la siguiente sección, se vera con un ejemplo la extraordinaria calidad de MUSIC en términos de resolución. Tomando como la señal utilizada en apartados previos, se procede a estimar su matriz de autocorrelación para un orden 11. La matriz resultante produce los autovalores mostrados en la figura III.22.



**Figura III.22. Autovalores de la matriz de autocorrelación estimada usando 1024 muestras del proceso sinusoides en ruido blanco. Obsérvese que al ser dos sinusoides reales (4 complejas) hay 4 valores significativos y cuatro parecidos. La decisión sobre el número de autovalores de señal puede ser, en otros casos, crucial y complicada en la implementación de Music.**

Como puede verse, la decisión de cuantos autovalores no se hace difícil. De hecho, tan solo se dificulta cuando se dan las dos posibilidades siguientes: Cuanto más próximas estén dos sinusoides o menor sea su SNR más difícil se hace distinguir la frontera entre el espacio de señal y el de ruido. Tomando el valor adecuado de cuatro, el estimador MUSIC aparece en la figura III.23 en la parte superior. En las partes central e inferior de la figura se muestra lo que ocurre cuando se subestima el orden. El lector puede apreciar lo grave que esto resulta. Al incluirse un vector del espacio de señal y no tener éste ceros en la posición de las líneas espectrales pierde resolución, y en este caso, hasta pierde una de las líneas.

En el caso de sobre-estimar el orden, como los autovectores seleccionados tiene todos ceros en las líneas espectrales el estimador no pierde resolución, si bien se puede probar que incrementa su varianza o introducir falsos picos. En general, en caso de duda es preferible sobre-estimar el orden del espacio de señal ya que esto garantiza que la resolución es la adecuada al precio de incrementarse la varianza del estimador.

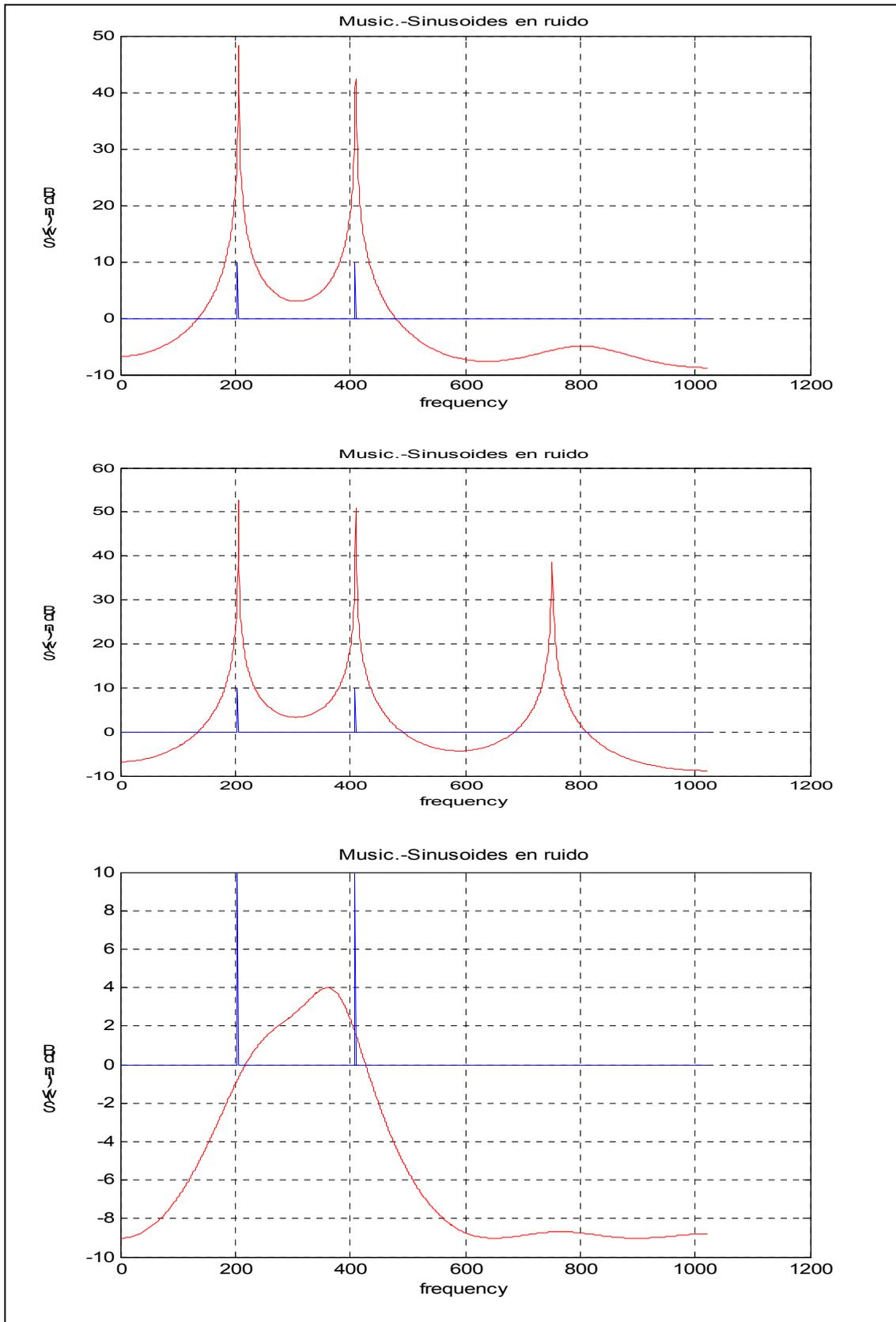


Figura III.23. De arriba abajo: el estimador MUSIC con selección correcta de la dimensión del espacio de señal, con un orden menor en una unidad, con orden superior en una unidad.

### III.9. AUTOVECTORES, AUTOVALORES Y DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Una manera sencilla de entender la relación entre la descomposición en valores singulares de una matriz de correlación (SVD ‘Singular Value Decomposition’), y motivar un estudio profundo de esta y su relación con nuevos métodos de estimación espectral, es formular la densidad espectral tal y como se expresa en (III.124):

$$S(\omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} r(q) \exp(-jq\omega) \quad (\text{III.124})$$

La expresión revela que la convolución de la secuencia de autocorrelación con una senoide de frecuencia  $\omega_0$  es igual a una senoide de la misma frecuencia con un factor que es precisamente la densidad espectral a dicha frecuencia:

$$S(\omega) \exp(jn\omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} r(q) \exp(j(n-q)\omega) \quad (\text{III.125})$$

Vistas estas ecuaciones y considerando que la convolución no es más que el producto escalar de dos funciones y que éste, a su vez, puede entenderse como el producto de la fila de una matriz por un vector conteniendo la senoide, podemos escribir la definición de la densidad espectral como un problema de autovalores. Dicho de otro modo, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\underline{RS} = S(\omega)\underline{S} \quad S(\omega) \begin{bmatrix} \vdots \\ \exp(jn\omega) \\ \exp(j(n+1)\omega) \\ \vdots \end{bmatrix} = \underline{R} \begin{bmatrix} \vdots \\ \exp(jn\omega) \\ \exp(j(n+1)\omega) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{III.126})$$

Donde se escribe la convolución mencionada como un producto de la fila de una matriz de correlación con la señal de salida, igual ésta a la de entrada. En definitiva, y para dimensiones infinitas o muy grandes de la matriz de correlación, se podría decir que la densidad espectral es el autovalor de la ecuación (III.126) donde, como es habitual, el vector  $\underline{S}$  contiene las muestras de un fasor a frecuencia  $\omega$ . La estimación espectral, es decir, el problema de conocer exactamente el autovalor del problema anterior, nace cuando de la matriz tan solo se dispone de un segmento de  $Q \times Q$  en lugar de infinitos elementos o, en la práctica, de un número suficientemente elevado.

El lector se preguntará que porqué esta relación no se ha usado nunca para comenzar y acabar la explicación de cualquier estimador espectral. Probablemente la respuesta esté en que la SVD como herramienta, a pesar del excelente trabajo de Pisarenko, fue recobrada recientemente, treinta años después de que Pisarenko mostrase su tremendo valor. Para evidenciar la importancia de esta manera de ver el análisis espectral, se comenzara a revisar prácticamente todos los métodos partiendo tan solo de la validez de (III.126).

Asumiendo que se desconoce todo lo anterior y tomando como origen únicamente la ecuación mencionada, el primer estimador se obtendría de suponer que para la autocorrelación estimada (de dimensiones finitas) también se verifica. Con esto, despejar el estimador es sencillo después de multiplicar a ambos lados por el vector  $\underline{S}$  y recordando que su norma es su longitud:

$$S_1(\omega) = \frac{1}{Q} \underline{S}^H \underline{RS} \quad (\text{III.127})$$

Como puede verse, el estimador WOSA es también aquí el primero en surgir. Más interesante es expresar el estimador obtenido en base a los autovectores y los autovalores de la matriz de correlación:

$$\underline{\underline{R}} = \sum_{q=1}^Q \lambda_q \underline{e}_q \underline{e}_q^H \quad (III.128)$$

$$S(\omega) = \sum_{q=1}^Q \lambda_q \left| \underline{S}^H \underline{e}_q \right|^2 = \sum_{q=1}^Q \lambda_q E_q(\omega)$$

Reflexionando sobre (III.126), esta última ecuación permite entender lo que ocurre cuando el orden tiende a infinito. Si ambas ecuaciones son ciertas para Q muy grande quiere decir que los autovalores de la matriz de correlación convergen a la densidad espectral en cada punto  $\omega_i$  y que la DFT al cuadrado de los autovectores tiende a ser una delta. En definitiva:

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^Q \lambda_q E_q(\omega) \Rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} S(\omega_i) \delta(\omega - \omega_i) \quad (III.129)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Dicho de otro modo, cualquier expresión de un estimador puede considerarse razonable siempre que, cuando el orden tienda a infinito, el estimador espectral en cada  $\omega$  coincida con un autovalor de la matriz de autocorrelación. Este concepto unido a la propiedad de que cualquier operación caracterizada por una función continua monótona en  $]0, \infty]$  verifica:

$$f(\underline{\underline{R}}) = \sum_{q=1}^Q f(\lambda_q) \underline{e}_q \underline{e}_q^H \quad (III.130)$$

permite escribir la siguiente familia de estimadores espectrales:

$$S(\omega) = f^{-1}(\underline{S}^H f(\underline{\underline{R}}) \underline{S}) \quad (III.131)$$

Antes de derivar nuevos estimadores usando la flexibilidad que la fórmula anterior proporciona, se comprobó que cumple la condición antes mencionada:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\underline{S}^H f(\underline{\underline{R}}) \underline{S}) &= f^{-1} \left( \sum_{q=1}^Q f(\lambda_q) E_q(\omega) \right) = \left. \begin{array}{l} \text{cuando} \\ Q \text{ tiende} \\ \text{a infinito} \end{array} \right| = \\ &= f^{-1} \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(S(\omega_i)) \delta(\omega - \omega_i) \right) = \left. \begin{array}{l} \text{dada el} \\ \text{comportamiento} \\ \text{de la función } \delta \end{array} \right| = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^{-1}(f(S(\omega_i))) \delta(\omega - \omega_i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} S(\omega_i) \delta(\omega - \omega_i) \end{aligned} \quad (III.132)$$

Luego a partir de este momento prácticamente todos los estimadores propuestos pueden formularse, de un modo u otro a partir de (III.85).

El caso del método WOSA es aquel en que  $f(x) = x$ . El caso del estimador de Capon o MLM, es el que se corresponde con  $f(x) = x^{-1}$ . A continuación se listan otros estimadores basados en (III.85): exponencial, potencial y racional.

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= \exp(\underline{S}^H \underline{L} \ln(\underline{R}) \underline{S}) \\
S(\omega) &= (\underline{S}^H (\underline{R})^p \underline{S})^{1/p} \\
S(\omega) &= \frac{\underline{S}^H (\underline{R})^{-p} \underline{S}}{\underline{S}^H (\underline{R})^{-p-1} \underline{S}}
\end{aligned} \tag{III.133}$$

Nótese que dentro del caso racional,  $p=-1$  es WOSA,  $p=0$  es MLM,  $p=1$  es NMLM y  $p=\infty$  es Pisarenko. Finalmente, es interesante comentar cual es la conexión de MUSIC con estimadores derivados según se ha indicado en este apartado. Tomando como referencia el método MLM, y de cara a compararlo con MUSIC, se escriben ambos en función de los autovalores y autovectores de la matriz de autocorrelación:

$$\begin{aligned}
S_{MUSIC}(\omega) &= \frac{1}{\sum_{q=N_s+1}^Q |\underline{S}^H \underline{e}_q|^2} \\
S_{MLM}(\omega) &= \frac{1}{\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S}} = \frac{1}{\sum_{q=1}^Q \lambda_q |\underline{S}^H \underline{e}_q|^2}
\end{aligned} \tag{III.134}$$

A partir de aquí se hace evidente en qué difiere un detector de frecuencia como MUSIC de un estimador espectral como MLM. En primer lugar los autovectores de señal le quitan resolución al estimador y por esta razón se suprimen, en segundo lugar (y de forma menos justificada), los autovectores se ponderan con el mismo valor. Un estimador próximo a MUSIC pero con mucha más resolución que MLM se obtiene cuando se incluyen los autovalores del subespacio de ruido en la formula de MUSIC (estimador de Johnson):

$$S_{Johnson}(\omega) = \frac{1}{\sum_{q=N_s+1}^Q \lambda_q |\underline{S}^H \underline{e}_q|^2} \tag{III.135}$$

El lector podría alegar que, al ser los autovalores de ruido todos iguales a la potencia de ruido, no hay cambio alguno en la expresión del estimador, lo cual es cierto excepto cuando el número de muestras disponible es pequeño. En resumen, el aumento de resolución de cualquiera de los estimadores que contienen la inversa de la matriz de correlación en el denominador se consigue suprimiendo el espacio de señal de dicha matriz.

### III.10. CONCLUSIONES

El tema de estimación espectral junto con los dos temas que siguen, se consideran aun hoy como el contenido central de procesado de señal, y de donde salieron la mayor parte de ideas, aplicaciones y desarrollos basados en DSPs. Se han expuesto con detalle los estimadores que en la actualidad se emplean en todos los ámbitos. Con todo, la estimación es siempre un problema abierto por lo que es de esperar que la lista de estimadores crezca aun más. Lo cierto es que en la literatura especializada la colección de métodos y peculiaridades es muy grande. Durante más de quince años, cada mes se publicaron del orden de diez artículos en el tema. En cualquier caso, los métodos expuestos son, por decirlo de algún modo los supervivientes.

Se comenzó por los denominados métodos no paramétricos. Basados en el periodograma, estos métodos son considerados de artesanía ya que el diseño de la ventana o del banco de filtros, que soporta su validez, es más o menos ad-hoc y a gusto de la aplicación a resolver. En este sentido, el denominado

MLM y su versión normalizada NMLM suponen el techo en lo que a calidad de esta familia se refiere. No obstante, al margen de su complejidad, el método de Thomson es con mucho el mejor método no paramétrico de análisis espectral.

A continuación, se han expuesto los métodos denominados paramétricos o basados en un modelo. Mención especial merece la estimación partiendo de un modelo AR. Estos procedimientos son de buena resolución, parecida a NMLM, sin embargo, como se podrá ver en el tema siguiente, su papel en procesamiento de señal ha sido preponderante dada su relación con predicción lineal. También se ha expuesto el único formalismo conocido para estos procedimientos como métodos denominados variacionales. Si bien el objetivo puede considerarse un factor cosmético y parece que se debería otorgar un papel preponderante a las restricciones, es la combinación de ambos la que conforma, desde el problema variacional, el estimador correspondiente.

Se han expuesto a continuación los denominados detectores de frecuencia. Empleados habitualmente para la localización de sinusoides en ruido y de especial importancia en procesamiento de arrays, básicamente se caracterizan por comportarse como un estimador espectral que sacrifica su precisión en aras de la resolución. El método más conocido es el denominado MUSIC que como se ha podido comprobar es básicamente una reducción al espacio de ruido del estimador MLM. Precisamente en este aspecto se ha insistido en el siguiente apartado. Se ha podido observar que bajo la óptica de que el espectro y los autovalores son asintóticamente idénticos, se ha derivado una expresión que permite derivar nuevos estimadores e incluso conocer propiedades de los ya desarrollados. Aunque este paralelismo entre estimadores se ha llevado a cabo entre MLM, WOSA y MUSIC, el lector puede realizarlo también para los casos de NMLM y MEM.

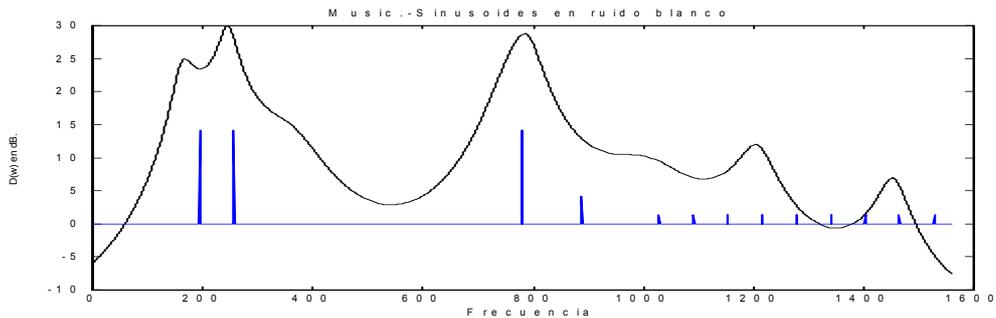
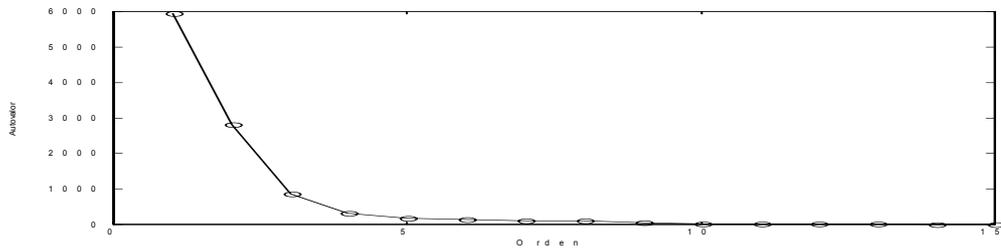
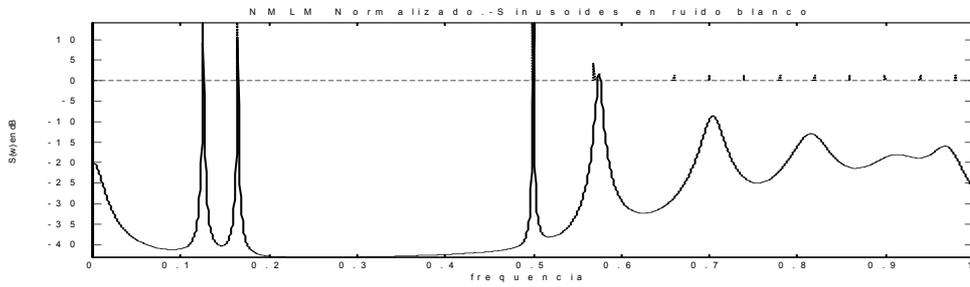
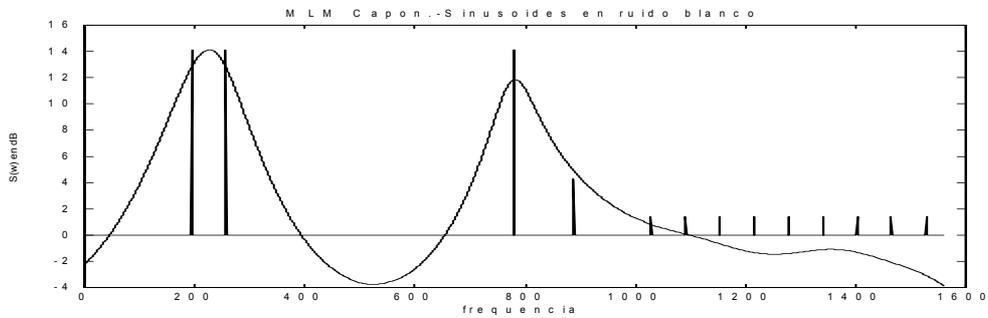
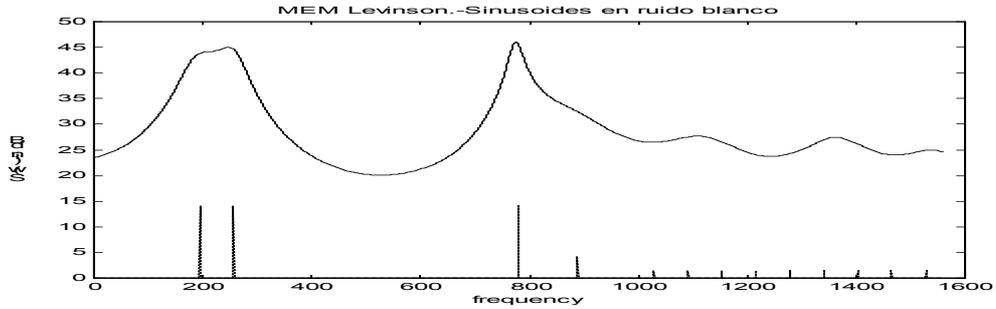
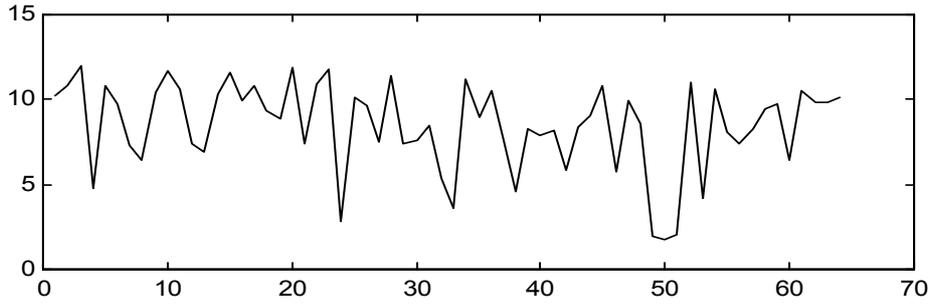
Finalmente y para poder valorar de manera global los estimadores expuestos, la figura III.21 muestra la estimación que cada uno de ellos proporciona en una señal que se ha utilizado como Standard en estimación espectral para comparar los diferentes métodos. La frecuencia y la SNR de las cuatro sinusoides incluidas son las siguientes:

Frecuencia (Margen de 0 a 0.5)	SNR en dB(ruidoBlanco)
0.0625	20
0.0825	20
0.25	20
0.285	10
0.33	0
0.35	0
0.37	0
0.39	0
0.41	0
0.43	0
0.45	0
0.47	0
0.49	0

El número de puntos de señal es de 64 y el orden de todos los métodos, salvo periodograma es 15.

El número de autovalores significativos para Music se seleccionó igual a ocho.

En sentido descendente, las gráficas muestran: Periodograma, MEM, MLM



### III.11. EJERCICIOS.

1.- ¿Cómo diseñaría un estimador espectral para una señal que consiste en un modelo AR de orden Q en ruido blanco aditivo, aprovechando que se trata de un modelo ARMA específico?

2.- Si conoce que el proceso del que desea su densidad espectral contiene una interferencia de banda estrecha en una frecuencia  $\omega_d$  indique como modificaría la expresión general del periodograma para adecuarlo a la situación comentada.

3.- Un procedimiento de estimación del espectro consiste en calcular el módulo al cuadrado de la DFT de todos los datos, sin segmentar, y seguidamente realizar un alisado de la curva obtenida. Tomando como ventana de alisado  $W(l)$  de longitud Q, comente si este procedimiento equivale a WOSA tradicional indicando el número de segmentos, la ventana a utilizar y el solapamiento en su caso.

4.- Comente porqué se considera una ventana optima a aquella que concentra la mayor parte de su energía en un intervalo de T segundos y la mayor parte de su contenido frecuencial en B Hz. Es decir, dadas las expresiones:

$$\frac{\int_{-T/2}^{T/2} |w(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\int_{-B/2}^{B/2} |W(w)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{\infty} |W(w)|^2 dw} = \beta$$

encontrar la función que dado  $\alpha$  maximiza  $\beta$ . Formule el problema en términos de una ventana discreta y demuestre que la ventana óptima es la solución a un problema de autovectores y autovalores.

5.- Dada una señal bidimensional  $x(n_1, n_2)$  de dimensiones  $N \times M$ , formule el estimador de máxima verosimilitud y NMLM para la estimación de su densidad espectral.

6.- Considere la formulación MEM para el caso de una señal de dos dimensiones e indique si en este caso puede hablarse de modelo AR y qué problemas conlleva la resolución del problema de encontrar el estimador en comparación al caso de señal unidimensional.

7.- Demuestre la expresión que relaciona la estimación espectral MLM con los estimadores de órdenes sucesivos por MEM. Aprovechando esta expresión indique como podría calcularse el estimador MEM de una señal bidimensional a base de estimadores MLM de la misma.

8.- Demuestre que en el caso de una senoide en ruido coloreado el autovector asociado al autovalor máximo permite estimar directamente la frecuencia de la senoide, sin necesidad de calcular su respuesta frecuencial.

9.- Tomando como referencia las ecuaciones de Yule-Walker extendidas para la estimación del denominador de un modelo ARMA, considere que dispone de más ecuaciones que incógnitas. Sugiera un procedimiento para estimar los coeficientes que use de todos los valores disponibles de correlación.

10.- Considerando el caso de sinusoides en ruido blanco y partiendo de que las primeras son completamente predictibles, use el concepto de predicción lineal exacta para derivar un método de detección de frecuencia y comente sus semejanzas con MUSIC. Note que puede usar el concepto de predicción de la muestra central al formular las ecuaciones del predictor.

11.- Considere el caso de dos sinusoides en ruido blanco y que dispone de N muestras. Usando el concepto de predicción exacta, formule las ecuaciones de un predictor de N-1 coeficientes tanto a  $x(0)$  como a  $x(N-1)$  mostrando que este puede expresarse como

$$\underline{\underline{X}}b = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

siendo  $X$  una matriz de  $2 \times (N-1)$  y el vector  $\underline{b}$  el que contiene los coeficientes del predictor  $b(1)$  hasta  $b(N-1)$ . A continuación encuentre el vector de coeficientes que verificando la ecuación anterior tiene mínima respuesta al ruido (mínima norma).

Forme ahora el estimador como la inversa de la respuesta en frecuencia del predictor, es decir respuesta en frecuencia de  $(1, -b(1), \dots, -b(N-1))$  y compárelo con un procedimiento tipo WOSA y con MUSIC.

12.- Extienda el estimador del ejercicio anterior al caso de una imagen de  $N \times N$  muestras donde las ecuaciones de predicción exacta se realizan sobre las cuatro muestras de las esquinas de la imagen dada.

13.- Considere un proceso gaussiano  $\{x\}$  generado a partir de ruido blanco gaussiano  $\{e\}$  de potencia  $N_o$  y un sistema de función de transferencia  $H(w)$ . Responda a las siguientes cuestiones:

- a.- ¿Cuál es la expresión del estimador espectral para  $\{x\}$   $\hat{s}_x(w)$  dado un estimador para  $\{e\}$   $\hat{s}_e(w)$ ?
- b.- Encuentre la relación entre el valor esperado de  $\hat{s}_x(w)$  y el valor esperado de  $\hat{s}_e(w)$ .
- c.- Relacione la varianza de ambos estimadores y verifique que siempre la varianza de estimador  $\hat{s}_x(w)$  es proporcional a la densidad espectral verdadera  $s_x(w)$ .

Asuma ahora que  $E[\hat{s}_e(w)] = N_o$  y que  $VAR^2[\hat{s}_e(w)] = N_o^2 \left[ 1 + \frac{\text{sen}^2(Qw)}{Q^2 \cdot \text{sen}^2(w)} \right]$

14.- a) Demuestre las expresiones del estimador espectral de Capon, para potencia y densidad espectral a partir del diseño de un banco de filtros

$$P^C(w) = \frac{1}{\underline{S}^H \underline{R}_{\underline{x}}^{-1} \underline{S}} \quad ; \quad s_x^C(w) = \frac{\underline{S}^H \underline{R}_{\underline{x}}^{-1} \underline{S}}{\underline{S}^H \underline{R}_{\underline{x}}^{-2} \underline{S}}$$

.....

Tomando la expresión del periodograma para la misma señal como:  $P(w) = \frac{\underline{S}^H \underline{R}_{\underline{x}} \underline{S}}{\underline{S}^H \underline{S}}$ , y

considerando que el proceso contiene una senoide de potencia  $\alpha_d$  a la frecuencia correspondiente, en ruido de matriz de covarianza  $\underline{R}_{\underline{o}}$ , se pide:

.....

b) Demuestre que el periodograma a la frecuencia  $f_d$  mide un valor  $Q$  veces, siendo  $Q$  la longitud de los datos, superior a la potencia de la señal mas la contribución del ruido a esa frecuencia.

(NOTA:  $\underline{R}_{\underline{x}} = \alpha_d \cdot \underline{S}_d \cdot \underline{S}_d^H + \underline{R}_{\underline{o}}$ )

.....

Use la desigualdad  $|\underline{u}^H \underline{v}|^2 \leq |\underline{u}^H \underline{u}| |\underline{v}^H \underline{v}|$ , con igualdad cuando el vector  $\underline{u}$  es proporcional al vector  $\underline{v}$  para contestar a la siguiente pregunta.

.....

c) Demuestre que el periodograma tiene siempre, a cualquier frecuencia, un valor superior que el estimador de Capon ya corregido con el número de muestras  $Q$ . Es decir, debe demostrar que:

$$\frac{\underline{S}^H \underline{R}_{\underline{x}} \underline{S}}{\underline{S}^H \underline{S}} \geq \frac{\underline{S}^H \underline{S}}{\underline{S}^H \underline{R}_{\underline{x}}^{-1} \underline{S}}$$

d) Pruebe también que se produce igualdad tan solo en dos situaciones: 1.- El proceso sea ruido blanco. 2.- Si el proceso es una senoide en ruido blanco, entonces tan solo son iguales en la frecuencia a la que esta la senoide, es decir, para  $\underline{S}$  igual a  $\underline{S}_d$ .

.....  
 Note que, del apartado anterior, se puede concluir que el método de Capon siempre tendrá mayor resolución que el periodograma, pues, al tomar el mismo valor en la posición adecuada el primero decaerá más rápido que el segundo que siempre es mayor.

.....  
 e) Utilice del mismo modo que en apartado (d) la desigualdad para probar que el denominado estimador normalizado tiene siempre más resolución a su vez que el estimador de Capon (aumentado en el valor Q).

Al estimador de Capon se le llama erróneamente de máxima verosimilitud o ML. Para comprobar que son diferentes, se pide:

f) Formule la verosimilitud del vector de Q datos  $\underline{X}_n$ , dada la amplitud  $\alpha$ , el vector de frecuencia  $\underline{S}$  y la matriz de covarianza del ruido  $\underline{R}_{=0}$ . Demuestre que el estimador ML de la amplitud viene dado por:

$$\hat{\alpha} = \frac{\underline{S}^H \cdot \underline{R}_{=0}^{-1} \cdot \underline{X}_n}{\underline{S}^H \cdot \underline{R}_{=0}^{-1} \cdot \underline{S}} \quad \text{en lugar del proporcionado por Capon} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\underline{S}^H \cdot \underline{R}_{=x}^{-1} \cdot \underline{X}_n}{\underline{S}^H \cdot \underline{R}_{=x}^{-1} \cdot \underline{S}}$$

g) Demuestre que ambos estimadores están insesgados y calcule sus varianzas, demostrando que la varianza de Capon es superior a la del estimador del apartado (g), en todo el rango de frecuencias, salvo en la que esta realmente la senoide donde ambos estimadores coinciden.

(Use el lema de la inversa,  $\underline{R}_x^{-1} = \underline{R}_0^{-1} - \left( \frac{\alpha_d}{\rho_d} \right) \cdot \underline{R}_0^{-1} \cdot \underline{S}_d \cdot \underline{S}_d^H \cdot \underline{R}_0^{-1}$ )

con  $\rho_d = 1 + \alpha_d \cdot \left( \underline{S}_d^H \cdot \underline{R}_0^{-1} \cdot \underline{S}_d \right)$

15.- Se dispone de una serie de datos que consisten en el muestreo mes a mes de datos correspondientes a régimen de lluvias en una cuenca hidrográfica. Como es obvio, y antes de proceder a cualquier técnica de análisis espectral, es claro que el proceso tendrá una componente fuerte en la periodicidad correspondiente al año. Por otro lado se esta interesado en las periodicidades de periodo superior a este, por ejemplo, cada seis años o cada once.

- a) Represente el espectro ideal si tan solo estuviesen presentes las periodicidades de seis años, un año y ruido blanco. Y dibuje aproximadamente el valor esperado del periodograma cuando la ventana de datos es  $w_d(n)$  con DFT  $W_d(f)$ .
- b) Considerando que la periodicidad de un año esta siempre presente, indique la condición que ha de cumplir la ventana de datos para que el leakage de la mencionada periodicidad sea nulo cuando se mide la densidad espectral a la frecuencia de seis años de periodo.
- c) Sea  $w_1$  la pulsación correspondiente a la frecuencia  $1/72 \text{ mes}^{-1}$ , y  $w_2$  la que correspondería a  $1/12 \text{ mes}^{-1}$ . Demuestre que la condición anterior, para la ventana de datos  $w_d(n)$  se puede escribir como:

$$\underline{w}_d^H \cdot \underline{S}_\Delta = 0$$

indicando la expresión del vector  $\underline{S}_\Delta$

Sea la matriz  $\underline{\Psi}$  la que se indica a continuación:

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{S}_\Delta \end{bmatrix} \text{ siendo el vector } \underline{1} \text{ un vector columna de todos unos.}$$

Con esta definición se cumple que:

$$\underline{\Psi}^H \cdot \underline{1} = \begin{bmatrix} Q \\ \alpha^* \end{bmatrix}; \underline{\Psi}^H \cdot \underline{S}_\Delta = \begin{bmatrix} \alpha \\ Q \end{bmatrix}; \underline{\Psi}^H \cdot \underline{\Psi} = \begin{bmatrix} Q & \alpha \\ \alpha^* & Q \end{bmatrix}; \left( \underline{\Psi}^H \cdot \underline{\Psi} \right)^{-1} = \frac{1}{Q^2 - |\alpha|^2} \cdot \begin{bmatrix} Q & -\alpha^* \\ -\alpha & Q \end{bmatrix}$$

siendo Q la longitud de la ventana y  $\alpha$  el producto escalar de los dos vectores que forman la matriz  $\underline{\Psi}$ .

- d) Calcule, para la ventana dada a continuación: Cuanto vale su energía  $\underline{w}_d^H \cdot \underline{w}_d$ ; compruebe que  $W_d(0)$  (DFT de  $w_d(n)$  a la frecuencia cero) es igual a la unidad, y que verifica la condición del apartado (c).

$$\underline{w}_d = \underline{\Psi} \cdot (\underline{\Psi}^H \cdot \underline{\Psi})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- e) Si la resolución se desea que sea de  $1/32$  mes<sup>-1</sup> y se desea reducir la varianza en 10 dB. con respecto a la obtenida con un solo periodograma, ¿Qué longitud de datos, muestreados a un mes de muestreo necesitaría como mínimo, usando ventana rectangular?
- f) Como se modifica el apartado anterior si, en lugar de ventana rectangular usa una ventana de tipo triangular?

16.- Como conoce, prácticamente todos los métodos paramétricos de análisis espectral pueden formularse en forma de filtros. En el diseño concreto para los filtros del banco se establece la diferencia entre ellos. Habitualmente, el filtro empleado para medir la densidad espectral a una frecuencia  $w_0$  cualquiera consiste en un prototipo paso-bajo  $h_p(n)$  trasladado (por modulación  $h_p(n) \cdot \exp(-jw_0 \cdot n)$ ) a la frecuencia deseada.

Asumiendo que se emplea este tipo de diseño y que va a emplear filtros de longitud  $Q$  muestras. Responda a las siguientes preguntas:

- a) Demuestre que para obtener una medida fiable a la salida de los filtros se requiere que, como mínimo el segmento bajo análisis tenga  $Q$  muestras.
- b) Indique como se deriva el estimador de potencia y de densidad espectral a cada frecuencia, en función de  $\underline{h}_{w0}$  si se dispone de  $M$  segmentos de  $Q$  datos (total  $N=Q \cdot M$ ).
- c) Demuestre que el estimador de Welch (WOSA) es el que resulta del banco de filtros cuando el prototipo es un integrador ( $h_0(n)=1, n=0, Q-1$ ).
- d) Si los segmentos en WOSA son enventanados, usando la función  $w(n)$  ( $n=0, Q-1$ ), ¿Cual es la relación de la ventana con el prototipo  $h_0(n)$  que mantiene coincidentes ambos procedimientos?
- e) Indique el estimador de potencia y de densidad cuando se emplean filtros óptimos y resalte las diferencias fundamentales con el método anterior.

17.- ) Si definimos:

$$\underline{S} = [ 1 \exp(-jw) \exp(-j2w) \dots \exp(-jQw) ]$$

$$\underline{X}_n = [ x^*(n) x^*(n-1) \dots x^*(n-Q+1) ]$$

$$\mathbf{R} = (1/N) \sum_{n1}^{n2} \underline{X}_n \cdot \underline{X}_n^H$$

$$x(n)=0 \text{ para } n < 0 \text{ y para } n > N-1$$

- a) comente las alternativas para la selección del comienzo y fin del sumatorio
- b) Compruebe que los elementos de la matriz  $\mathbf{R}$  son el estimador insesgado de la autocorrelación si  $n1=Q$  y  $n2=N-1$ .

Al utilizar la matriz  $\mathbf{R}$  en la expresión  $\underline{S}^H \cdot \mathbf{R} \cdot \underline{S}$ , demuestre que el estimador espectral resultante es equivalente al periodograma (Transformada de Fourier del estimador sesgado de autocorrelación). Es decir, el estimador resultante es positivo para toda  $w$ .

18.- Sea  $x_0$  un estimador de sesgo nulo y mínima varianza de la variable  $x$ . Considere ahora un estimador  $x1 = \rho \cdot x_0$ , compruebe que el error cuadrático medio del nuevo estimador tiene un mínimo para

$$\rho = x^2 / (\sigma_{x_0}^2 + x^2)$$

En el caso del periodograma  $\rho=1/2$  (justifíquelo), proporcione una explicación de la aparente mejora de  $x1$  respecto a  $x_0$ .

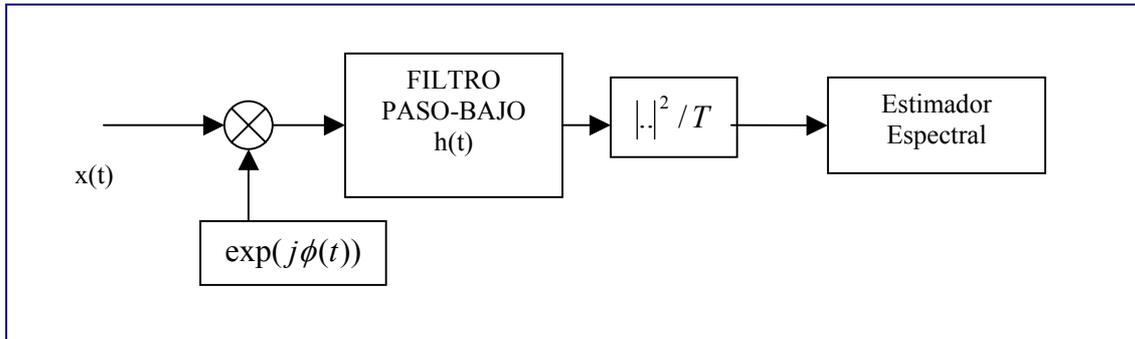
A la vista del comentario anterior, justifique la necesidad de representar siempre los estimadores espectrales en dB.

19.- En el diseño de analizadores de espectro vía banco de filtros, cuando el análisis es de ancho de banda constante, cada filtro se deriva de un prototipo paso bajo de respuesta impulsional  $\underline{h}_0$ . En otras palabras los coeficientes del filtro a la frecuencia  $w$  se forman por modulación del prototipo.

$$h_w(q) = \exp(-jw(q-1)).h_o(q)$$

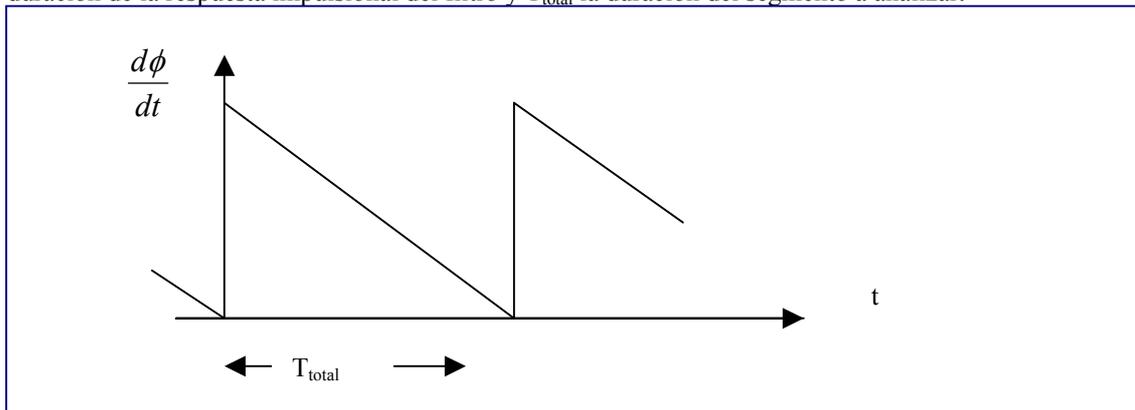
- a) ¿Cual es el prototipo que se ha de elegir para que el estimador resultante sea el periodograma?
- b) Porque el estimador de Capon no obedece al planteamiento del enunciado.

Obviamente, una alternativa a lo anterior es desplazar en frecuencia la señal y dejar el filtro fijo. El esquema seria el de la figura:



Donde T es la duración efectiva de la respuesta impulsional del filtro. h(t) es la respuesta impulsional del filtro, a cuya salida, se estima el espectro vía el modulo al cuadrado y dividiendo por la duración.

La señal  $\phi(t)$  es tal que su derivada con respecto al tiempo es como se indica en la figura. Siendo T la duración de la respuesta impulsional del filtro y  $T_{total}$  la duración del segmento a analizar.



Usando que  $\phi(t - \tau) \approx \phi(t) - \tau \cdot \frac{d\phi}{dt}$ , responde a la siguiente pregunta:

- c) A partir de la ecuación de convolución, demuestre que el modulo de la salida del filtro, en cada instante, proporciona la transformada de Fourier de un segmento de T segundos de la señal de entrada, enventanada con la respuesta impulsional del filtro.
- d) ¿Cual es la resolución en frecuencia de este analizador espectral?
- e) Dibuje aproximadamente como es la señal moduladora
- f) ¿Que ventajas y desventajas en su caso, ve a este analizador respecto al esquema del comienzo del enunciado, es decir, modular el filtro y dejar la señal sin modular?

20.- Considere un segmento de una señal de duración N muestras  $X_n$ , que esta compuesto por una senoide en ruido blanco de potencia  $\sigma^2$ . Su matriz de autocorrelación, como usted conoce, viene dada por  $\underline{\underline{R}} = P \cdot \underline{\underline{S}}_0 \cdot \underline{\underline{S}}_0^H + \sigma^2 \cdot \underline{\underline{I}}$ , siendo P la potencia de la senoide y el vector  $\underline{\underline{S}}_0^H = [1 \quad \exp(-jw_0) \quad \dots \quad \exp(-j(N-1)w_0)]$ .

- a) Demuestre que  $\underline{\underline{S}}_0$  es un autovector de la matriz de autocorrelación y diga cual es el autovalor correspondiente.

- b) Justifique, teniendo presente que los autovectores son ortonormales, que el autovalor encontrado en el apartado anterior es el mayor de los  $N$  autovalores de la matriz.
- c) Método MUSIC: Razone porque un estimador de la frecuencia de la sinusoides vendría dado por la siguiente expresión:

$$\max_{\text{segun } f} \frac{1}{\sum_{q=2}^N |e_q^H \cdot S|^2} \quad \text{Siendo } e_q \text{ } q=1,N \text{ los autovectores de la matriz de autocorrelación}$$

ordenados desde el mayor al menor autovalor y  $S^H = [1 \quad \exp(-j2\pi f) \quad \dots \quad \exp(-j(N-1)2\pi f)]$ .

- d) Cómo cambiaría el estimador anterior si en lugar de una sinusoides la señal contuviese dos, y se desea encontrar las frecuencias de ambas?
- e) Volviendo al caso de una sinusoides, pero considerando que el ruido es coloreado con matriz de covarianza igual a  $\underline{\underline{R}}_0$ , demuestre que todo lo anterior es valido si ahora los autovectores se extraen de la matriz  $\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}_0^{-1}$ . (NOTA.- Basta probar que el vector  $\underline{S}_0$  es también autovector de esta nueva matriz).

21.- Este ejercicio es una revisión detallada del método denominado de Máxima Entropía MEM para análisis espectral y su relación con otros temas del curso.

MEM es un método de estimación que respeta los valores de auto correlación conocidos (desde  $-Q$  a  $Q$ , es decir  $r(0), r(1), \dots, r(Q)$  ya que es una función par para señales reales) y al mismo tiempo maximiza la planicidad, la entropía en el caso gaussiano, del estimador.

1.- Formule las restricciones y el objetivo que producen el estimador MEM.

2.- Demuestre que la solución MEM cuando solo se restringe  $r(0)$  es un espectro plano (i.e. ruido blanco).

3.- A partir de la formulación propuesta en el primer apartado, resuelva la maximización con restricciones y pruebe que MEM es equivalente a adaptar un modelo AR (auto regresivo) a los datos (a la señal original).

4.- Demuestre que adaptar un modelo AR a los datos es equivalente a encontrar un filtro  $\underline{A}$  que minimiza la potencia de su salida cuando se le aplica a la entrada los datos y cumple la restricción de que su primer coeficiente es la unidad.

5.- Dando por cierto el apartado anterior, demuestre que el filtro  $\underline{A}$  es la solución de máxima verosimilitud para la estimación del modelo de un proceso AR (Auto Regresivo)

### III.12 REFERENCIAS

[1] R.B. Blackman, J.W. Tuckey. "The measurement of power spectra". Dover Publications Inc. New York. 1958.

[2] F. J. Harris. "On the use of windows for harmonic analysis with discrete Fourier transform" Proc. IEEE, Vol. 66, pp. 51-83, January 1978.

[3] S.L. Marple. "Digital spectral analysis with applications". Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ. 1987.

[4] J. Makhoul. "Linear Prediction: A tutorial review". Proc. IEEE, Vol. 63(4), pp. 561-580. April 1975.

[5] J.P. Burg. "A new analysis technique for time series data". Proc. NATO Advanced Study Institute. Signal Processing. Enschede, Holanda 1968.

[6] A.Papoulis. "The Fourier integral and its applications". McGraw Hill. New York. 1962.

- [7] P.D. Welch. "The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short modified periodograms". IEEE Trans. on AU, Vol. AU-15, pp.70-73, June 1967.
- [8] J.P. Burg. "Maximum entropy spectral analysis". Ph.D. Dissertation, Dept. of Geophysics, Stanford Univ. Stanford, CA. 1975.
- [9] S. Kay. "A new ARMA spectral estimator". IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing. Vol. ASSP-28, pp. 524-529, Oct. 1980.
- [10] M.A.Lagunas et al. "ARMA model maximum entropy power spectral estimation". IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing. Vol. ASSP-32, No. 5, pp. 984- 990, October 1984.
- [11] R.T. Lacoss. "Data adaptive spectral analysis methods". Geophysics. Vol. 36, pp. 661-675, Aug. 1971.
- [12] V.F. Pisarenko. "The retrieval of harmonics from a covariance function". Geophys. J. Royal Astron. Soc., Vol. 33, pp. 347-366, 1973.
- [13] S.M. Kay. "Fundamentals of Statistical Signal-Processing Estimation Theory. Prentice-Halls Inc. Englewood Cliffs, N.J. , 1993, pp.102-122.
- [14] R.O. Schmidt. " Multiple emitter location and signal parameter estimation". IEEE Trans AP, Vol. 34, pp.276-280, Mar. 1986.
- [15] G. Bienvenu. "Eigensystem properties of the sample space covariance matrix. Proc. ICASSP, pp. 332-335, Apr. 1983.
- [16] M.A.Lagunas, A. Gasull. "An improved maximum likelihood method for power spectral density estimation". IEEE Trans. ASSP, Vol. 32, pp.170-172, Feb. 1984.
- [17] J. Capon. "High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis", Proc. IEEE, Vol. 57, pp.1408-1418, Aug. 1969.
- [18] S. Kay, S. Marple. "Spectrum analysis. A modern perspective". Proc. IEEE, Vol. 69, no. 11, pp. 1380-1419, Nov. 1981.
- [19] D. Jhonson. "The application of spectral estimation methods to bearing estimation problems". Proc. IEEE, Vol. 70, no. 9, Sept. 1982.
- [20] M. A. Lagunas et al. "Maximum Likelihood Filters in Spectral Estimation, Signal Processing, EURASIP, "Special Issue on Major Trends in Spectral Analysis". Volume 10, No. 1, January 1986, ISSN-0165-1584, pp. 19-35.
- [21] R. Kumaresan, D.W. Tufts. "Improved spectral resolution III: Efficient realization". Proc. IEEE, Vol. 68, Oct. 1980.
- [22] J.P. Burg. "The relationship between maximum entropy and maximum likelihood spectrum". Geophysics, Vol. 37, pp. 375-376, Apr. 1972.
- [23] V.F. Pisarenko. "On the estimation of spectra by means of non-linear functions of the variance matrix". Geophysics. , Vol. 28, pp.511-531, 1972.
- [24] M.A.Lagunas et al. "A linear transform for spectral estimation". IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing. Vol. ASSP-29, No. 5, Oct. 1981, pp. 989-994.
- [25] P. Stoica, H. Li, J. Li. "Amplitude estimation of sinusoidal signals: Survey, new results, and an application". IEEE-SP Trans., Vol. 48, pp. 338-352, Feb. 2000.
- [26] David J. Thomson. "Spectrum estimation and harmonic analysis". Proc. IEEE, Vol. 70 No. 9, pp. 1055-1096, 1982.

- [27] P. Stoica, R. Moses. "Spectral Analysis of Signals". Englewood Cliffs, NJ. Prentice Hall, 2005.
- [28] J. Durbin. "Efficient estimation of parameters in moving average models". Biometrika 46, pp.306-316. 1959,
- [29] B.R. Musicus, A.M. Kabel. "Maximum Entropy pole-zero estimation". ICASSP-86, paper 27.12, Tokyo, 1986.
- [30] P. Stoica, N. Sandgren. "Smoothed Nonparametric Spectral Estimation Via Cepstrum Thresholding". IEEE Signal Processing Magazine. Pp. 34-45, November 2006.
- [31] M.A. Lagunas, P. Stoica. "ARMA parameter estimation: Revisiting a cepstrum based method". Submitted to ICASSP-08. Las Vegas. USA.
- [32] J.J. Fuchs. "Order estimation via matrix perturbation theory". IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. 32, pp. 358-361, April, 1987.
- [33] A. Kizilkaya, A.H. Kayran. "ARMA model parameter estimation based on the equivalent MA approach". Digital Signal Processing. Elsevier, pp. 679-681, 16, 2006.
- [34] A. Kaderli, A.S. Kayhan. "Spectral estimation of ARMA processes using ARMA-Cepstrum Recursion". IEEE Signal Processing Letters. Vol. 7, no. 9, pp. 259-261, September 2000.