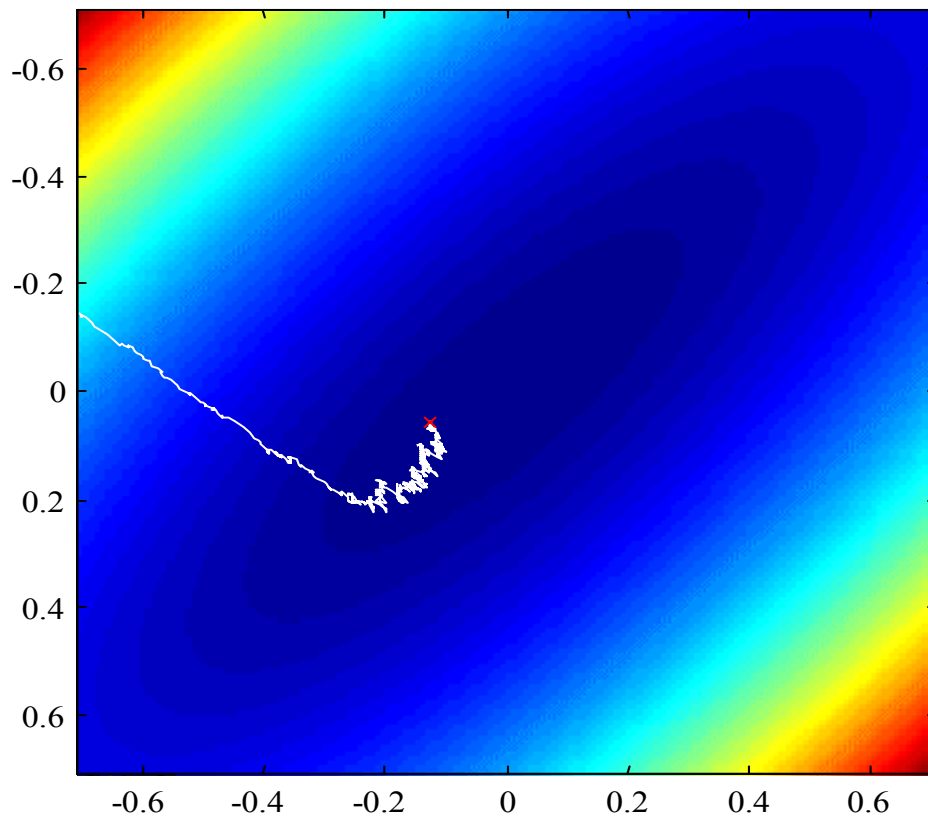


PROCESADO DE SEÑAL



Miguel A. Lagunas, Josep Vidal, Ana I. Perez-Neira.

Capítulo I. FORMULACIÓN VECTORIAL EN PROCESADO DE SEÑAL

- I.1. SEÑALES Y VECTORES
- I.2. AUTOCORRELACIÓN
- I.3. FILTRADO
- I.4. SINUSOIDES EN RUIDO Y LEMA DE LA INVERSA
- I.5. MINIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES
- I.6. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES
- I.7. CONCLUSIONES
- I.8. EJERCICIOS
- I.9. BIBLIOGRAFÍA

Capítulo II. PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y ESTIMACIÓN DE PARAMETROS

- II.1. VARIABLES ALEATORIAS
- II.2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS
- II.3. ESTACIONARIDAD Y ERGODICIDAD
- II.4. PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y SISTEMAS LINEALES
- II.5. PROBABILIDAD, ENTROPIA Y ESTIMACIÓN
- II.6. ESTIMACIÓN MAP Y ML DE LA MEDIA DE UN PROCESO
- II.7. LA CALIDAD DE UN ESTIMADOR
- II.8. ALISADO DE DATOS
- II.9. ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE CORRELACIÓN
- II.10. MODELOS RACIONALES
- II.11. CONCLUSIONES
- II.12. EJERCICIOS

II.13. BIBLIOGRAFÍA

Capítulo III. ESTIMACIÓN ESPECTRAL

- III.1. EL ESTIMADOR DE CORRELACIÓN
- III.2. TRANSFORMACIONES Y VENTANAS
- III.3. LA VARIANZA DEL PERIODOGRAMA
- III.4. BANCO DE FILTROS Y ANÁLISIS ESPECTRAL
- III.5. ESTIMACIÓN ESPECTRAL DE MÍNIMA VARIANZA (MLM)
- III.6. MÉTODOS VARIACIONALES Y ESTIMACIÓN ESPECTRAL PARAMÉTRICA
- III.7. DETECTORES DE FRECUENCIA: MUSIC
- III.8. AUTOVECTORES, AUTOVALORES Y DENSIDAD ESPECTRAL
- III.9. CONCLUSIONES
- III.10. EJERCICIOS
- III.11. BIBLIOGRAFÍA

Capítulo IV. EL FILTRO DE WIENER

- IV.1. ESTIMACIÓN MSE (ERROR CUADRÁTICO MEDIO) Y FILTRO DE WIENER
- IV.2. EL FILTRO DE WIENER EN FRECUENCIA
- IV.3. EL FILTRO DE WIENER A PARTIR DE LOS DATOS
- IV.4. PREDICCIÓN LINEAL
- IV.5. EL ALGORITMO DE LEVINSON
- IV.6. LA ESTRUCTURA EN CELOSIA (LATTICE)
- IV.7. APLICACIONES

IV.8. CONCLUSIONES

IV.9. EJERCICIOS

IV.10. BIBLIOGRAFÍA

Capítulo V. SISTEMAS ADAPTATIVOS

V.1. INTRODUCCIÓN

V.2. MSE Y MÉTODOS DE GRADIENTE

V.3. DISEÑO Y CONVERGENCIA DE ALGORITMOS
DE GRADIENTE

V.4. EL ALGORITMO LMS

V.5. DSD Y MÉTODOS DE BÚSQUEDA ALEATORIA

V.6. ALGORITMO RLS

V.7. FILTRO DE KALMAN

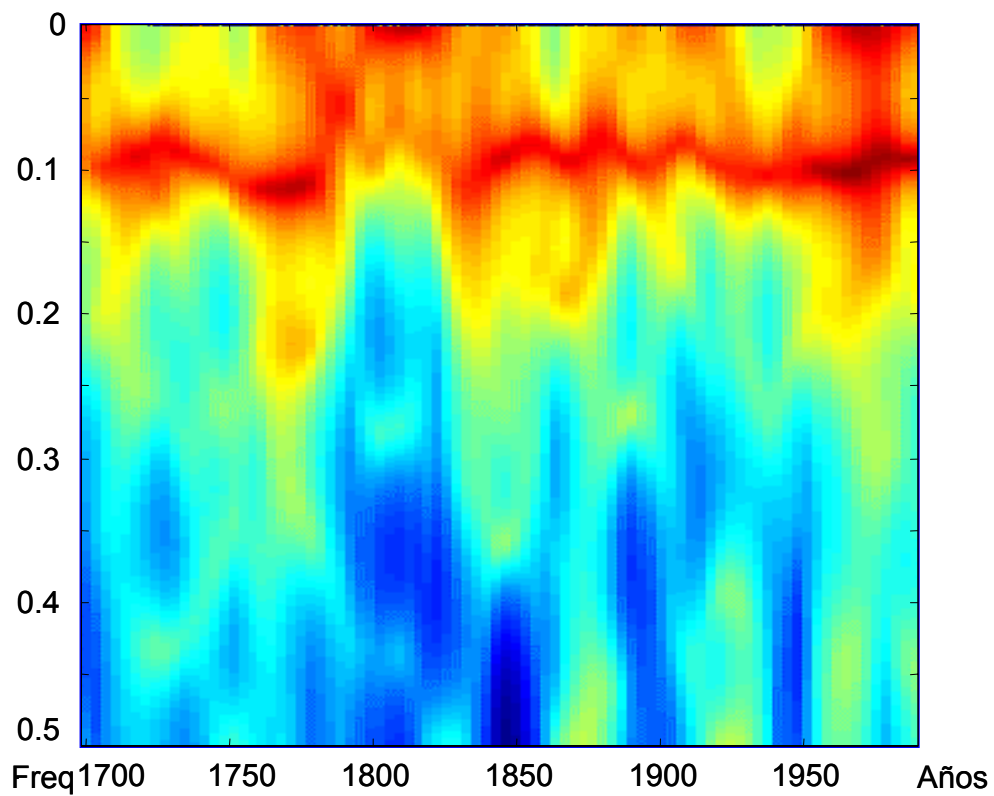
V.8. CONCLUSIONES

V.9. EJERCICIOS

V.10. BIBLIOGRAFÍA

Capítulo I

FORMULACIÓN VECTORIAL EN PROCESADO DE SEÑAL



- I.1. SEÑALES Y VECTORES
- I.2. AUTOCORRELACIÓN
- I.3. FILTRADO
- I.4. SINUSOIDES EN RUIDO Y LEMA DE LA
INVERSA
- I.5. MINIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES
- I.6. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES
- I.7. CONCLUSIONES
- I.8. EJERCICIOS
- I.9. BIBLIOGRAFÍA

I.1 SEÑALES Y VECTORES

Todas las señales discretas de duración finita son de energía finita y por tanto pueden considerarse como vectores de N componentes. Si bien esta interpretación es también correcta para señales analógicas, el presente capítulo se dedicará exclusivamente al caso de señales discretas. En muchas situaciones de interés, las señales son de duración infinita, es decir de potencia media finita; no obstante, el hecho de que el procesado de éstas puede verse como el tratamiento sucesivo en el tiempo de bloques de N muestras, permite realizar una presentación restringida a señales de energía finita.

Assumiendo una duración finita para ambas señales, se consideraran a continuación dos señales $x(n)$ y $h(n)$, ambas de N muestras. Como se ha anticipado, cualquier secuencia puede expresarse en notación vectorial como vectores \underline{x} o \underline{h} , definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\underline{x}^T &= [x(0), x(1), \dots, x(n), \dots, x(N-2), x(N-1)] \\ \underline{h}^T &= [h(0), \dots, h(N-1)]\end{aligned}\quad (I.1)$$

donde el súper-índice T indica transpuesto. En primer lugar se ha de destacar que la noción de espacio vectorial conlleva la definición de un producto escalar y por tanto de una norma. El producto escalar de dos vectores se define como:

$$\underline{h}^H \underline{x} = \sum_{n=0}^{N-1} h^*(n)x(n) \quad (I.2)$$

donde el súper-índice H indica transpuesto conjugado y el asterisco indica complejo conjugado. La norma de un vector coincide con el producto escalar del vector consigo mismo y se denomina energía de la señal.

$$\|\underline{x}\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \underline{x}^H \underline{x} \quad (I.3)$$

Al mismo tiempo, el producto escalar permite establecer el parecido de dos señales ya que, bajo la interpretación de vectores, cuanto mayor sea su producto escalar más co-lineales son los vectores o más parecidas son las señales. De hecho, la distancia entre dos vectores, definida como la norma del vector diferencia, disminuye directamente con el producto escalar de ambos vectores, siempre que se mantenga la norma de éstos y tan solo cambie su dirección. La misma conclusión puede obtenerse al aplicar la desigualdad (I.4):

$$|\underline{h}^H \underline{x}|^2 \leq \|\underline{h}\|^2 \|\underline{x}\|^2 \quad (I.4)$$

que se verifica con igualdad cuando, salvo un factor de ganancia, las dos secuencias son proporcionales, o lo que es lo mismo, cuando ambos vectores son co-lineales, $h(n)=\alpha x(n)$. Nótese que una medida objetiva del parecido sería la función γ definida como:

$$|\gamma|^2 = \frac{|\underline{h}^H \underline{x}|^2}{\|\underline{h}\|^2 \|\underline{x}\|^2} \leq 1 \quad (I.5)$$

Esta expresión también se denomina coherencia entre ambas señales o vectores, en el sentido de que cuando las señales son proporcionales la coherencia es máxima, es decir, es la unidad. De nuevo es de destacar que a mayor coherencia menor es la distancia entre dos vectores y que el denominador MSE (Error cuadrático

medio, Mean Square Error) disminuye siempre que aumenta la coherencia entre las dos señales que lo forman.

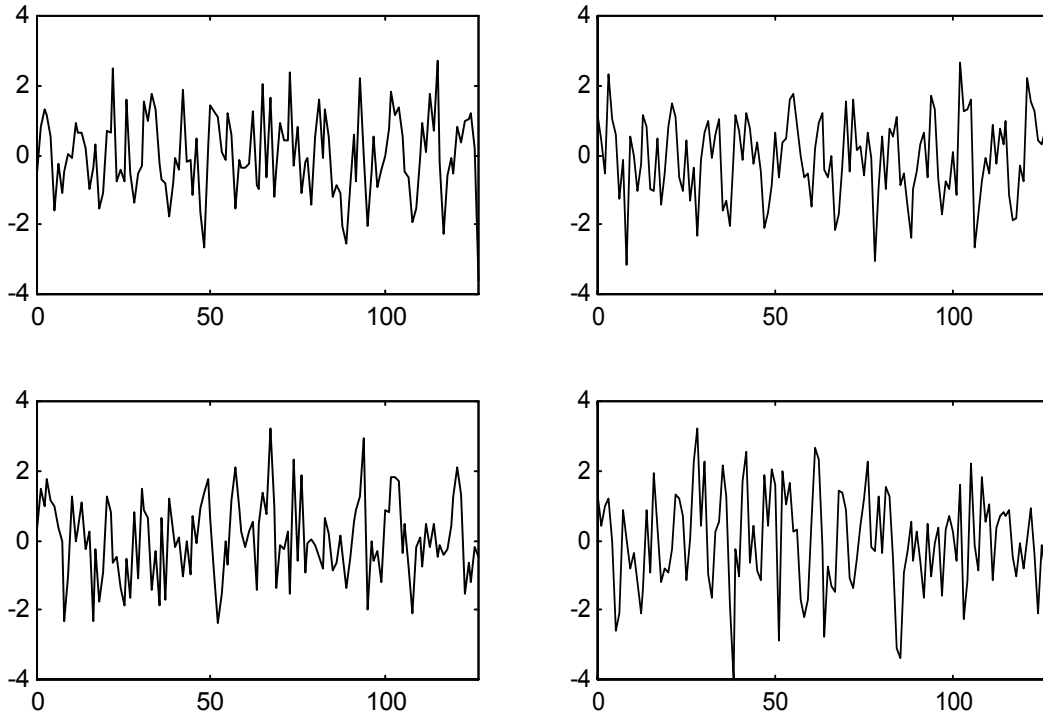


Figura 1.1. Parecido entre señales. Las señales de la columna de la derecha presentan una coherencia de 16.53% mientras que las de la columna de la izquierda presentan una coherencia del 3.88%

En el caso de señales de duración larga, con respecto a la capacidad de proceso, se recurre a segmentar esta y realizar un proceso por bloque o segmentos de menor duración. En esta situación, es interesante incorporar en la formulación vectorial otros bloques de muestras de una señal, asignando a cada vector tan solo un segmento de muestras correlativas de la señal completa. El caso de mayor interés es aquél en el que se considera un filtro FIR que usa $x(n)$ como señal de entrada, de larga duración. Si el filtro tiene una memoria de Q coeficientes, puede considerarse que la salida $y(n)$ es el producto escalar entre la respuesta impulsional $h(n)$ del FIR y el vector de muestras \underline{X}_n :

$$y(n) = \sum_{q=0}^{Q-1} h^*(q)x(n-q) = \underline{h}^H \underline{X}_n \quad (I.6.a)$$

siendo,

$$\underline{X}_n = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-Q+1) \end{bmatrix} \quad (I.6.b)$$

Esta formulación de la ecuación de un filtro será muy útil para extender la formulación vectorial en cualquier ámbito de procesamiento de señal. La forma, en que en el instante n , se forma el vector le da el nombre

de run-time vector. Es de destacar que por cada muestra de $x(n)$ se obtiene un vector como el anterior y que, como se vera más adelante, para una señal de N muestras y un filtro de orden Q , se puede formar $N+Q-1$ run-time vectores que darán lugar a los correspondientes valores de la señal de salida.

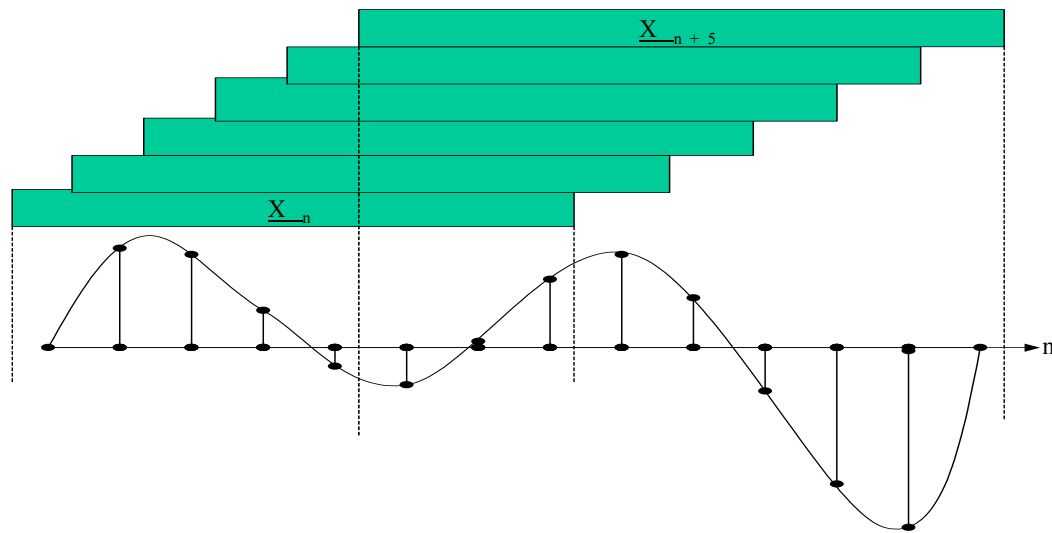


Figura 1.2. Formación de los vectores run-time, de una longitud de 8 muestras , en instantes consecutivos de muestras.

1.2 AUTOCORRELACION

Continuando con la utilidad de disponer de un producto escalar entre señales, se examinara como resulta el concepto de distancia entre ambas en base al producto escalar o norma definido.. Es claro, que la noción de distancia va unida a la de parecido y, por tanto, el producto escalar será parte importante en la evaluación de la distancia entre dos señales, como ya se ha comentado.

Dadas las señales $x(n)$ e $y(n)$, la distancia entre ambas viene dada por (I.7), donde se ha omitido la división por el número de sumandos por sencillez, ya que no altera las conclusiones o la discusión.

$$D_{xy} = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n) - y(n)|^2 = (\underline{x} - \underline{y})^H (\underline{x} - \underline{y}) = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 - \underline{x}^H \underline{y} - \underline{y}^H \underline{x} \quad (I.7)$$

Como puede verse la distancia contiene dos términos diferentes. El primero son las energías de las señales comparadas, a mayor energía mayor será la distancia o, dicho de otro modo, al comparar cosas grandes es fácil que la distancia pueda ser grande. El segundo termino es el esperado, a mayor parecido menor distancia. Es más, nótese que el parecido, establecido con la función de coherencia se independiza de la energía de las fuentes. Al mismo tiempo, se puede ver que el concepto de ortogonalidad implica que la distancia será igual a la suma de energías. Este comportamiento puede considerarse uno de los grandes problemas de esta noción de parecido basada en la distancia euclidea. La razón es que visualmente una señal y su versión cambiada de signo, consideradas muy parecidas, presentan una distancia euclidea máxima. La otra razón en contra de asimilar la distancia euclidea con el parecido, en sistemas de reconocimiento, es también su distancia con el sistema auditivo; ya que dos señales de frecuencia pura pero separadas centésimas de Hz son consideradas ortogonales por esta distancia, mientras que serian indistinguibles por nuestro sistema auditivo. No obstante, el hecho de que esta medida presente un solo mínimo hace que su uso en ingeniería y aplicaciones este tan extendida. Como podrá verse la noción euclidea de distancia esta fuertemente ligada al

carácter gaussiano de las señales a tratar y al empleo de sistemas lineales en su medida o adquisición, proceso y estimación.

Lo dicho anteriormente en cuanto a distancia y parecido puede extenderse a la señal consigo misma. El parecido es la unidad (100%) y su auto-producto escalar es la norma. La extensión interesante estriba en calcular el parecido de una señal con una versión desplazada de ella misma, es evidente, que de este modo se extiende la noción de auto-parecido o, más conocido como la auto correlación de una señal. La función obtenida, para diversos desplazamientos o 'lags' se denomina función de auto correlación. Una manera rápida y eficiente de calcular el parecido para Q-1 lags sucesivos se describe a continuación.

Si se define la auto correlación de $x(n)$ como

$$r(m) = \frac{1}{M} \sum_n x^*(n-m)x(n) = \frac{1}{M} \sum_n x^*(n)x(n+m) \quad (I.8)$$

donde se ha dividido por el número de términos usados en el sumatorio. El valor calculado, la auto correlación en m , indicará el parecido entre $x(n)$ y $x(n-m)$. De este modo, al auto-parecido nos indica la capacidad que tenemos de predecir la señal $x(n)$ o de extrapolarla y, por razones obvias, será máxima en el origen $m = 0$. Si la señal se parece mucho para $m = 2$ (su $r(2)$ es muy parecida a $r(0)$) quiere decir que $x(n+2)$ se parece mucho a $x(n)$.

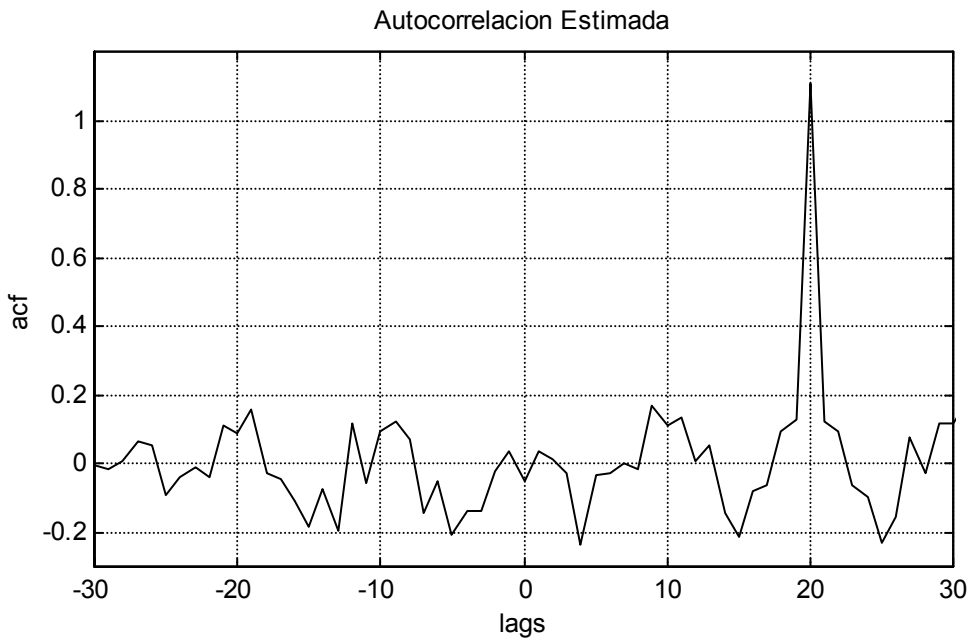


Figura 1.3. Correlación cruzada entre dos señales. La segunda señal es la primera desplazada 20 muestras.

Si ahora se usa el vector \underline{X}_n , se puede encontrar directamente una matriz de auto correlación conteniendo todos los Q primeros valores de la función de auto correlación.

$$\underline{\underline{R}} = \frac{1}{M} \sum_n \underline{X}_n \underline{X}_n^H = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(Q-1) \\ r(-1) & r(0) & \cdots & r(Q-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-Q+1) & r(-Q+2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

La matriz de correlación es simétrica (Hermitica si la señal es compleja, es decir $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^H$) y tiene en sus diagonales el mismo valor (matriz de Toeplitz).

Es importante recordar que todas las funciones obtenidas (distancia, parecido, auto correlación) han sido derivadas a partir de la definición del producto escalar. Cambiando la definición de este se obtendrían las mismas nociones mencionadas. Dentro de estas definiciones alternativas a la empleada de energía, merece la pena destacar las dos que, en general, estarán siempre implícitas en el presente curso; una para señales deterministas, y la otra para señales aleatorias. A continuación se exponen las definiciones del producto escalar para señales de potencia media finita y para procesos aleatorios.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{x}} \perp \underline{\underline{y}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \right) \sum_n x^*(n) y(n) \\ \underline{\underline{x}} \perp \underline{\underline{y}} &= E \{ \underline{\underline{x}}^H \underline{\underline{y}} \} \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Más adelante, en el Capitulo II, se volverá a esta ultima definición de producto escalar que usa el denominado valor esperado.

I.3 FILTRADO

Como ya se ha comentado, una de las ventajas mayores de la formulación vectorial de señales es su utilización para implementar y diseñar filtros. La formulación vectorial para un FIR de Q coeficientes es el producto escalar del vector $\underline{\underline{X}}_n$ por el vector de respuesta impulsional $\underline{\underline{h}}$:

$$y(n) = \sum_{q=0}^{Q-1} h^*(q) x(n-q) = \begin{bmatrix} h^*(0) & h^*(1) & \dots & h^*(Q-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-Q+1) \end{bmatrix} = \underline{\underline{h}}^H \underline{\underline{X}}_n \quad (\text{I.11})$$

A su vez, la energía instantánea de la señal de salida y su potencia media serán:

$$\begin{aligned} |y(n)|^2 &= \underline{\underline{h}}^H \underline{\underline{X}}_n \underline{\underline{X}}_n^H \underline{\underline{h}} \\ r_y(0) &= \frac{1}{M} \sum_n |y(n)|^2 = \underline{\underline{h}}^H \underline{\underline{R}} \underline{\underline{h}} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

Nótese que la energía media es una forma cuadrática de núcleo igual la matriz de auto correlación de la señal de entrada. Esta expresión es de gran interés y revela tanto el funcionamiento en transitorio como en permanente del filtro. Otra forma de expresar la operación entrada/salida en un FIR es la que agrupa en un vector todas las muestras de la señal de salida para una entrada de N muestras, que se vera a continuación. Como corresponde a un FIR de Q muestras, existe un pre-transitorio de Q muestras, un régimen permanente de la muestra Q-1 hasta la N-1, y un post-transitorio de también Q muestras:

$$\underline{\underline{y}}^T = [y(0) \quad y(1) \quad \dots \quad y(Q-1) \quad \dots \quad y(N-1) \quad y(N) \quad \dots \quad y(N+Q-1)] \quad (\text{I.13})$$

Las componentes del vector definido para la salida se corresponden con el producto escalar del vector de respuesta impulsional por las columnas de una matriz formada por la entrada, tal y como sigue:

$$\underline{h}^H \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(Q-1) & \cdots & x(N-1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x(0) & \cdots & x(Q-2) & \cdots & x(N-2) & x(N-1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x(0) & \cdots & x(N-Q) & x(N-Q+1) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix} = \underline{h}^H \underline{X} \quad (\text{I.14})$$

Dado que la energía de la salida puede escribirse como:

$$E_y = \underline{y}^H \underline{y} = \underline{y}^T \underline{y}^*$$

la potencia responde a la expresión:

$$P_y = \frac{1}{M} \underline{y}^T \underline{y}^* = \underline{h}^H \frac{1}{M} \underline{X} \underline{X}^H \underline{h} \quad (\text{I.15})$$

Nótese que esta expresión, ofrece otra versión matricial, también a partir de los datos, de la matriz de auto correlación, para ello basta comparar (I.15) con la segunda expresión de (I.12). También, esta formulación sugiere que en el cálculo de la matriz de auto correlación existirán varias versiones, dependiendo de si se considera el pre y/o el post-transitorio o solo el permanente. Como se vera en un capítulo posterior, las alternativas mencionadas entrañan calidad y dificultad diferentes en el diseño de sistemas lineales.

Por último, es posible re-escribir la matriz de correlación a partir de la matriz de datos de la ecuación (I.14):

$$\underline{R} = \frac{1}{M} \sum_n \underline{X}_n \underline{X}_n^H = \frac{1}{M} \underline{X} \underline{X}^H$$

I.4 SINUSOIDES EN RUIDO Y EL LEMA DE LA INVERSA

Se incluyen en este apartado dos aspectos de la formulación vectorial que, aparentemente de poca entidad, aparecen en la mayor parte de las aplicaciones y temas que siguen. El primero tiene que ver con las que se podían llamar señales de rango uno. Sin entrar en más detalles sobre su denominación, digamos que nos referimos a sinusoides complejas. Su expresión viene dada por (I.16), donde A_o es la envolvente, θ_o es la fase, f_o es la frecuencia y A es la denominada envolvente compleja. Cuando esta señal pasa a ser tratada por un filtro de Q coeficientes, el vector implicado en el calculo de la salida viene dado por:

$$s(n) = A_o \exp(j2\pi f_o n + \theta_o) = A \exp(j2\pi f_o n)$$

$$\underline{S}_n = A \exp(j2\pi f_o n) \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-j2\pi f_o) \\ \vdots \\ \exp(-j2\pi f_o (Q-1)) \end{bmatrix} = A \exp(j2\pi f_o n) \underline{S}_o \quad (\text{I.16})$$

El segundo termino de la segunda ecuación revela que con tan solo variar una componente, se actualizan las Q componentes del vector. Más aun, al calcular la auto correlación de la señal, omitida la división por el número de sumandos, queda igual a:

$$\underline{R}_o = \frac{1}{M} \sum_n \underline{S}_n \underline{S}_n^H = |A|^2 \underline{S}_o \underline{S}_o^H \quad (\text{I.17})$$

Es decir, la matriz de auto correlación es de rango uno lo que motiva el nombre que se ha mencionado en el primer párrafo de esta sección. Es fácil comprobar que la matriz de rango uno, denominada diada, y formada, en este caso, a partir del vector \underline{S}_o , da lugar a una matriz donde todas sus filas o columnas son proporcionales entre si y de aquí que se la denomine de rango unidad. De hecho, cada diada del tipo $\underline{S} \underline{S}^H$ contribuye a incrementar el rango en una unidad siempre que los vectores que se emplean en la formación de cada diada sean independientes.

El caso más habitual es encontrarse las señales anteriores en ruido blanco gaussiano e incorrelado con la sinusoide. Aún antes de entrar en el tema de procesos, y al ser necesario utilizar ruido blanco, nótese que la principal característica del ruido blanco es el parecido nulo que presenta éste consigo mismo. Esta propiedad tiene como consecuencia que, salvo en el origen, la auto correlación del denominado ruido blanco sea cero. Por la misma razón, la matriz de auto correlación de ruido blanco será diagonal y la expresión de la matriz de correlación de orden Q de la sinusoide en ruido aditivo blanco aditivo será:

$$\begin{aligned} y(n) &= s(n) + w(n) \\ \underline{\underline{R}} &= |A|^2 \underline{\underline{S}}_o \underline{\underline{S}}_o^H + \sigma^2 \underline{\underline{I}} \end{aligned} \quad (I.18)$$

Nótese que el vector de señal $y(n)$ es un vector de distribución gaussiana $\underline{Y}_n = \underline{S}_n + \underline{W}_n = A \exp(j2\pi f_0 n) \underline{S}_o + \underline{W}_n$.

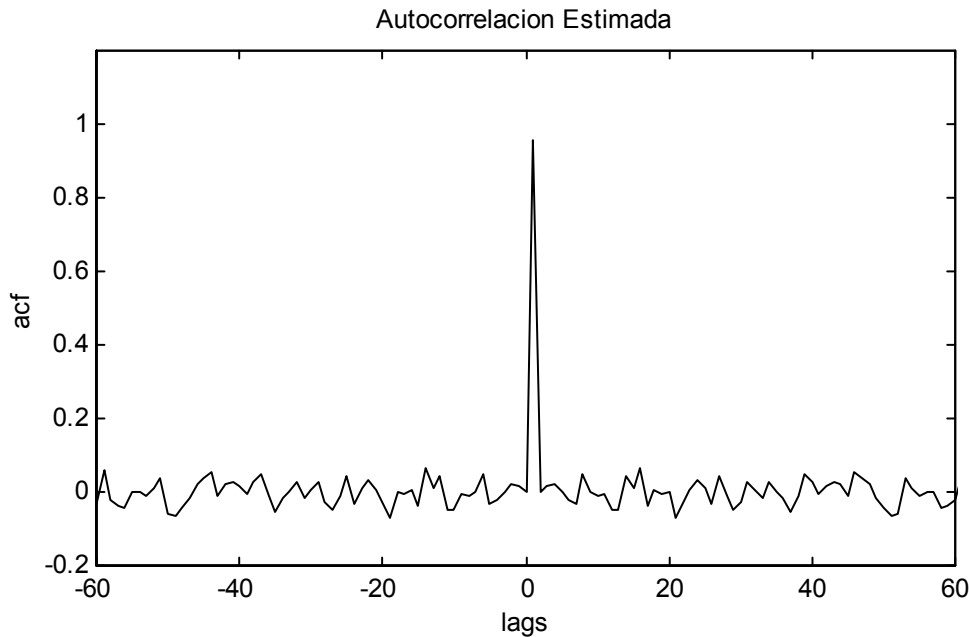


Figura 1.4. auto correlación de ruido blanco. El nivel diferente de cero fuera del origen se debe al procedimiento de medida o estimación de la auto correlación.

La expresión de la matriz de autocorrelación (I.18) muestra que, en el caso de existir $M < Q$ sinusoides ortogonales existirían M términos similares. La suma de cada término implica una contribución de rango uno, por lo que la matriz $\underline{\underline{R}}_s$ será de rango M :

$$\underline{\underline{R}} = \sum_{m=1}^M |A_m|^2 \underline{\underline{S}}_m \underline{\underline{S}}_m^H + \sigma^2 \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{R}}_s + \sigma^2 \underline{\underline{I}} \quad (I.19)$$

La descomposición de la matriz de auto correlación anterior, válida siempre que se trate de señales independientes, sugiere las denominaciones de subespacio de señal y subespacio de ruido. Los vectores ortonormales que definen dichos subespacios son los autovectores que corresponden a la matriz original. Es

de destacar que, habitualmente el rango o número de vectores independientes que forman la matriz de señal suele ser menor que el orden de la matriz ($M < Q$).

En cualquier problema de filtrado o eliminación de ruido, como podrá verse más adelante, se requiere la inversa de la matriz de correlación de la señal de entrada. Por esta razón, la siguiente fórmula, conocida como el lema de la inversa, será de utilidad en capítulos posteriores:

$$\begin{aligned} \text{si } \underline{\underline{R}} &= \underline{\underline{G}}\underline{\underline{G}}^H + \underline{\underline{R}}_a \quad \text{entonces} \\ \underline{\underline{R}}^{-1} &= \underline{\underline{R}}_a^{-1} - \underline{\underline{R}}_a^{-1} \underline{\underline{G}} \left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{G}}^H \underline{\underline{R}}_a^{-1} \underline{\underline{G}} \right)^{-1} \underline{\underline{G}}^H \underline{\underline{R}}_a^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Como caso particular, consideremos que se trata de una senoide en ruido coloreado (matriz de auto correlación no diagonal), a continuación se muestran ambas expresiones,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}} &= \alpha \underline{\underline{S}}_o \underline{\underline{S}}_o^H + \underline{\underline{R}}_n \\ \underline{\underline{R}}^{-1} &= \underline{\underline{R}}_n^{-1} \left(\underline{\underline{I}} - \frac{\alpha \underline{\underline{S}}_o \underline{\underline{S}}_o^H \underline{\underline{R}}_n^{-1}}{1 + \alpha \underline{\underline{S}}_o^H \underline{\underline{R}}_n^{-1} \underline{\underline{S}}_o} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

Otra relación de interés es que la proyección del vector característico de la senoide según la inversa de la matriz de auto correlación y la de la inversa del ruido solo difieren en una constante,

$$\underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{S}}_o = \underline{\underline{R}}_n^{-1} \left[\frac{1}{1 + \alpha \underline{\underline{S}}_o^H \underline{\underline{R}}_n^{-1} \underline{\underline{S}}_o} \right] \quad (\text{I.22})$$

La simplificación de las expresiones anteriores al caso de ruido aditivo blanco es obvia.

1.5 MINIMIZACION CON RESTRICCIONES

El diseño de filtros o sistemas puede formularse siempre como la minimización de una función, denominada objetivo, sujeta a restricciones. El objetivo o función a minimizar, para procesos gaussianos y sistemas lineales, es el error cuadrático medio (MSE). El MSE, al ser la energía o la potencia de la señal de error, y tal como se ha comentado previamente, siempre se puede formular como una forma cuadrática en función de la respuesta a diseñar $\underline{\underline{a}}$, de Q coeficientes, tal y como sigue:

$$MSE = \xi = \underline{\underline{a}}^H \underline{\underline{C}} \underline{\underline{a}} \quad (\text{I.23})$$

donde la matriz del núcleo, de dimensión $Q \times Q$, es forzosamente definida positiva. Es más, la expresión del MSE conlleva, al tener en cuenta la descomposición de una matriz en subespacio de señal y de ruido, manejar conceptos de relación señal a ruido. En otras palabras, minimizar el MSE con la restricción de que la potencia de señal ha de ser constante entraña la maximización de la relación señal a ruido.

Es obvio que la minimización directa del MSE lleva a la solución trivial del vector nulo para $\underline{\underline{a}}$. Normalmente evitar la solución trivial entraña el poner restricciones al filtro a diseñar. Dichas restricciones tienen que ver con la respuesta temporal y/o frecuencial del filtro. Si las restricciones afectan a su respuesta, como se trata de un sistema lineal, siempre dichas restricciones se pueden formular de forma matricial:

$$\underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{f}} \quad (\text{I.24})$$

En primer lugar, el número de restricciones, para evitar el sistema sobre-determinado, ha de ser inferior a Q , el número de grados de libertad en el diseño. Esto equivale a decir, de manera mas formal, que el rango de la matriz de restricciones ha de ser inferior a la longitud del vector a diseñar. Así pues, en el caso de R restricciones, la matriz de restricciones será de dimensión $(R \times Q)$ y su rango será R , es decir, no existe redundancia en el planteamiento de las restricciones. De otro modo, dada una matriz de restricciones hay que asegurar que su rango no sea inferior al número de restricciones pues implicaría la existencia de restricciones redundantes. En esta situación la solución no cambia pero la complejidad del diseño se incrementa sin necesidad alguna.

En definitiva, se ha de minimizar (I.23) sujeto a las restricciones (I.25). La minimización con restricciones se convierte en minimización libre vía la formación del denominado Lagrangiano,

$$\Lambda = \underline{a}^H \underline{C} \underline{a} - \left[\underline{a}^H \underline{\Phi}^H - \underline{f}^H \right] \underline{\lambda} \quad (\text{I.25})$$

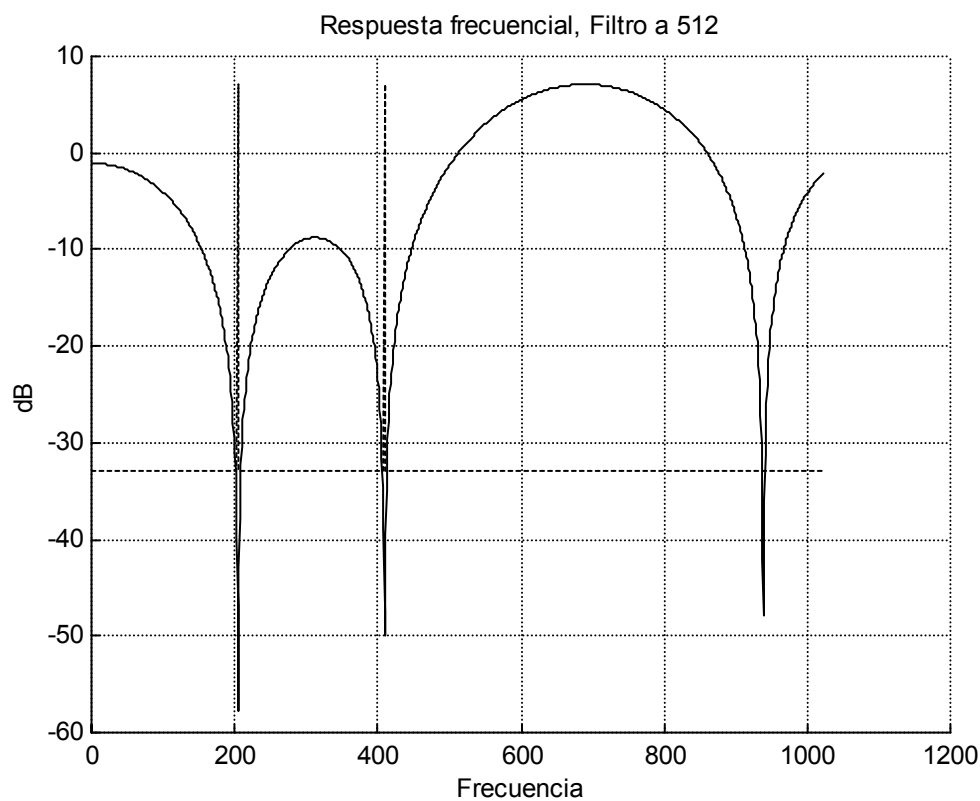


Figura 1.5. Respuesta en frecuencia de filtro de 7 coeficientes. El objetivo era mínima potencia de salida con ruido blanco a la entrada. Como restricciones era la de respuesta de 8 dB en la frecuencia central y anular las dos interferencias en las frecuencias indicadas en el dibujo.

donde el vector $\underline{\lambda}$ contiene los denominados multiplicadores de Lagrange (R en total, uno por cada restricción). La solución óptima se obtiene derivando (I.25) con respecto a la parte real de \underline{a} y con respecto a la parte imaginaria e igualando a cero. Este proceso se ve simplificado en el caso de que la función compleja a derivar cumpla las denominadas condiciones de Cauchy-Riemann; sin entrar en detalles, podemos decir que toda forma cuadrática, como (I.25), siempre verifica las mencionadas condiciones. Al verificar las condiciones C-R, la derivada con respecto a cada una de las partes equivale a derivar con respecto al vector conjugado y transpuesto e igualar el complejo resultante a cero. Siempre teniendo en cuenta que,

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial \underline{a}^H} = 0 \quad (\text{I.26})$$

Al tomar el gradiente del Lagrangiano con respecto al vector conjugado, se obtiene la ecuación de diseño.

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \underline{a}^H} = \underline{C} \underline{a} - \underline{\Phi} \underline{\lambda} = \underline{0} \quad (\text{I.27})$$

donde $\underline{0}$ representa el vector de todas las componentes cero. Note que la condición de mínimo implica que el Jacobiano de la expresión a minimizar (en nuestro caso la matriz \underline{C}) sea definido positivo. Esto es normalmente cierto pues \underline{C} suele coincidir con la matriz de auto correlación de la señal de entrada.

Despejando el vector optimo resulta (I.28):

$$\underline{a} = \underline{C}^{-1} \underline{\Phi} \underline{\lambda} \quad (\text{I.28})$$

que describe todos los vectores que minimizan el objetivo con restricciones cuyo núcleo es la matriz que aparece en su expresión. Con el fin de encontrar los multiplicadores, se ha de obligar a que la restricción que se verifica sea específicamente el vector \underline{f} , es decir, al sustituir (I.28) en (I.24) se obtiene el vector de multiplicadores y la solución definitiva:

$$\underline{a} = \underline{C}^{-1} \underline{\Phi}^H \left[\underline{\Phi} \underline{C}^{-1} \underline{\Phi}^H \right]^{-1} \underline{f} \quad (\text{I.29})$$

Puede comprobarse fácilmente que esta solución verifica las restricciones y que, a su vez, se minimiza el objetivo, cuyo valor mínimo aparece en (I.30).

$$MSE_{min} = \underline{f}^H \left[\underline{\Phi} \underline{C}^{-1} \underline{\Phi}^H \right]^{-1} \underline{f} \quad (\text{I.30})$$

La utilidad de la minimización con restricciones se verá en los temas dedicados a filtro de Wiener y análisis espectral. También es destacable el interés del lema de la inversa, visto en el apartado anterior, ya que en la minimización con restricciones siempre aparece implicada la inversa de una matriz definida positiva.

I.6. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

La importancia de propiedades que afecten a matrices definidas positivas ya se ha expuesto en los apartados precedentes. Estas matrices, derivadas de los datos, de correlación o de covarianza a usar posteriormente, son definidas positivas en consonancia con su distribución espectral de energía o potencia como se vera mas adelante. Esta propiedad, en principio y aparentemente trivial o sin importancia, conlleva importantes propiedades que seria absurdo pasar por alto en procesado de señal, donde estas matrices son principio y final de la mayor parte de los diseños y aplicaciones. Este apartado se ocupa de la estructura asociada y que aparece en términos de sus autovalores y autovectores. No es necesario volver a comentar que este tipo de funciones son cruciales en cualquier sistema físico. Dichas funciones siempre revelan aquello que sobrevive a un sistema lineal: en mecánica cuántica los orbitales del átomo son los autovectores de una ecuación diferencial lineal, y el espacio de supervivientes es siempre discreto (número cuánticos que coinciden con los autovalores de la ecuación). Estos principios son los que explican el éxito de transformada de Laplace y transformada Z y, en particular, dentro de la misma familia, la transformada de Fourier en procesado de señal. El tema desborda el objetivo del apartado pero, puede decirse que, el origen matemático de grandes descubrimientos en la ciencia tiene su base en la sencillez matemática de lo que sigue.

Como se ha indicado en el apartado anterior, el diseño MSE entraña siempre el producto de una matriz definida positiva y simétrica por el vector a diseñar. Es evidente el predecir que aquellos vectores que sobrevivan al producto mencionado tendrán un papel privilegiado en procesamiento de señal. En concreto el interés se centra en aquellos vectores \underline{e} que verifican (I.31):

$$\underline{\underline{R}}\underline{e}_q = \lambda_q \underline{e}_q \quad (I.31)$$

Se denomina al vector \underline{e}_q autovector o vector propio y a la constante λ_q autovalor o valor propio.

Es fácil mostrar que si la matriz, de $Q \times Q$, es de rango completo existen Q autovectores diferentes ortonormales que permiten la siguiente descomposición para la matriz:

$$\underline{\underline{R}} = \sum_{q=1}^Q \lambda_q \underline{e}_q \underline{e}_q^H = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_1^H \\ \vdots \\ \underline{e}_Q^H \end{bmatrix} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{E}}^H \quad (I.32)$$

La matriz $\underline{\underline{E}}$ tiene los autovectores en sus columnas y la matriz diagonal $\underline{\underline{D}}$ contiene los autovalores. La ortonormalidad de los autovectores implica (I.33), siempre para una matriz de auto correlación.

$$\underline{\underline{E}}^H \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{I}} \quad \text{o bien} \quad \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{E}}^H \quad (I.33)$$

La ventaja de la descomposición (I.32) proviene de que todas las propiedades de la matriz $\underline{\underline{R}}$ quedan sistemáticamente reflejadas en los autovalores. A continuación, se verán algunos ejemplos de interés.

Si la matriz es definida positiva todos sus autovalores son positivos. Si la matriz $\underline{\underline{R}}$ es de rango $M < Q$ el número de autovalores iguales a cero es $Q-M$. El determinante de la matriz $\underline{\underline{R}}$ es el producto de sus autovalores y su traza, suma de los valores de su diagonal, es la suma de los autovalores. Estas propiedades son evidentes después de (I.32). También, es interesante comprobar que cualquier operación analítica realizada sobre los elementos de $\underline{\underline{R}}$ equivale a realizarse sobre la matriz de autovalores. Esta propiedad es muy interesante y en (I.34) se exponen algunas de sus consecuencias:

$$\begin{aligned} \text{Ln}[\underline{\underline{R}}] &= \underline{\underline{E}} \text{Ln}[\underline{\underline{D}}] \underline{\underline{E}}^H & \text{Ln}[\underline{\underline{D}}] &= \begin{bmatrix} \text{Ln}(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \text{Ln}(\lambda_Q) \end{bmatrix} \\ \exp[\underline{\underline{R}}] &= \underline{\underline{E}} \exp[\underline{\underline{D}}] \underline{\underline{E}}^H & \exp[\underline{\underline{D}}] &= \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \exp(\lambda_Q) \end{bmatrix} \\ [\underline{\underline{R}}]^m &= \underline{\underline{E}} [\underline{\underline{D}}]^m \underline{\underline{E}}^H & ; \text{ en particular } & [\underline{\underline{R}}]^{-1} = \underline{\underline{E}} [\underline{\underline{D}}]^{-1} \underline{\underline{E}}^H \end{aligned} \quad (I.34)$$

Como puede verse la matriz de auto correlación (de hecho toda matriz definida positiva) puede descomponerse en el producto de dos matrices. En concreto, $\underline{\underline{R}}$ ($Q \times Q$) es el producto de la matriz $\underline{\underline{X}}$ ($Q \times N$) por su Hermitica. La matriz $\underline{\underline{X}}$ tiene $Q < N$ autovalores diferentes de cero, y al no ser simétrica sus autovectores por la izquierda y por la derecha son diferentes en número, en correspondencia con sus dimensiones. En resumen la matriz $\underline{\underline{X}}$ admite la siguiente descomposición, llamada descomposición en valores singulares (o SVD):

$$\underline{\underline{X}} = \sum_{q=1}^Q \phi_q \underline{\underline{u}}_q \underline{\underline{v}}_q^H = \begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}_1 & \cdots & \underline{\underline{u}}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \phi_Q \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_1^H \\ \vdots \\ \underline{\underline{v}}_N^H \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{V}}^H$$

$$\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{I}} \quad \underline{\underline{V}}^H \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}} \quad (I.35)$$

$$\left(\underline{\underline{X}} \underline{\underline{X}}^H \right) \underline{\underline{u}}_q = \phi_q^2 \underline{\underline{u}}_q \quad q=1, \dots, Q \quad \left(\underline{\underline{X}}^H \underline{\underline{X}} \right) \underline{\underline{v}}_q = \begin{cases} \phi_q^2 \underline{\underline{v}}_q & q=1, \dots, Q \\ 0 & q=Q+1, \dots, N \end{cases}$$

En esta relación aparece el concepto de espacio nulo de una matriz, nótese que todos los vectores $\underline{\underline{v}}$ de subíndice mayor que Q tienen un autovalor nulo, es decir, el producto de la matriz por cualquiera de ellos es un vector de ceros, constituyendo una firma estimable para comprobar por anulación si una determinada señal esta presente. Además de la ortonormalidad de los vectores $\underline{\underline{u}}$ y los vectores $\underline{\underline{v}}$, se cumple la propiedad (I.36):

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{\Phi}}^2 \underline{\underline{U}}^H = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{U}}^H \quad (I.36)$$

Expresión que relaciona los autovalores de señal (orden uno) con los de correlación (orden dos).

I.7 CONCLUSIONES

Se ha presentado, todo lo someramente posible, una formulación vectorial para ser utilizada en capítulos posteriores. La presentación es más una colección de definiciones y propiedades que deberían haberse situado o referenciado allá donde se fuesen a usar en lugar de exponerlos como primer capítulo. La razón para su inclusión aquí es doble. En primer lugar, algunos de sus apartados aparecerían casi inmediatamente al comienzo del segundo capítulo con lo que constituirían más una introducción que un anexo. La segunda es que, aun tratándose de una formulación adicional a la tradicional, su dominio permite extenderse en los conocimientos previos que se requieren para la correcta asimilación de los temas posteriores, con lo que constituye un marco referente para establecer el punto de partida para el resto de temas. Este marco contiene necesariamente, conocimientos matemáticos, sistemas lineales y procesado de señal. El contenido del capítulo se limita deliberadamente a estos conocimientos matemáticos y deja al lector su encuadre en conocimientos ya adquiridos de sistemas lineales.

I.8 EJERCICIOS.

1.- Si se considera una señal $x(n)$ disponible desde $-\infty$ hasta el instante n , con una matriz de auto correlación, calculada hasta ese momento, igual a \underline{R}_n , se trata de actualizar dicha estimación según la siguiente formula:

$$\underline{R}_{n+1} = \beta \underline{R}_n + \alpha \underline{X}_{n+1} \underline{X}_{n+1}^H$$

Esta expresión introduce una memoria en el cálculo de la auto correlación en el sentido de que la influencia de un vector de datos queda 'olvidada' en la matriz de auto correlación al cabo de, teóricamente infinitas muestras, prácticamente al cabo de N muestras. Esta memoria depende de uno de los parámetros

a.- Indique la expresión de la memoria efectiva N en función de los parámetros empleados en la formula anterior.

La expresión anterior puede considerarse como un IIR de un cero y un polo.

- b.- Cual es la $H(z)$ de la expresión de actualización?
 c.- Cual seria la expresión tipo FIR equivalente a la anterior?
 d.- Discuta la conveniencia de utilizar α igual a $1-\beta$.

Esta expresión para actualizar la matriz de auto correlación se la denomina actualización de rango uno.

e.- Utilice el lema de la inversa para encontrar la actualización directa de la matriz inversa en $n+1$ a partir de la inversa en el instante n .

2.- Calcule la descomposición en autovectores y autovalores de las siguientes matrices todas de $Q \times Q$ elementos:

- a.- $\underline{S}_o \underline{S}_o^H$
 b.- \underline{I} matriz identidad.
 c.- $\underline{R} = a \underline{S}_o \underline{S}_o^H + \sigma^2 \underline{I}$

3.- Diseñe un FIR de dos coeficientes de modo que su respuesta al ruido en potencia sea mínima y su respuesta en continua sea la unidad. Una vez diseñado el filtro calcule la relación señal a ruido cuando su entrada es $x(n)=A+w(n)$ siendo $w(n)$ ruido gaussiano de potencia σ^2 . Reformule todo el ejercicio para el caso de que la matriz de auto correlación del ruido sea igual a:

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & \gamma \\ \gamma & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

e indique como es la SNR a la salida del filtro en función del parámetro γ .

4.- Dados dos vectores \underline{a} y \underline{b} no ortogonales, generar dos vectores ortogonales a partir de estos. Si ambos vectores son las Q muestras más recientes de dos señales x e y en el instante n , ¿le sirve el procedimiento para generar dos señales ortogonales?

5.- Si $x(n)$ e $y(n)$ son la entrada y la salida respectivamente de un filtro IIR de coeficientes $a(q)$ y $b(p)$, muestre que el filtro se puede formular como

$$\underline{a}^H \underline{Y}_n = \underline{b}^H \underline{X}_n$$

Pruebe asimismo que dada la respuesta impulsional del filtro IIR $h(n)$, existe la siguiente relación

$$\underline{H} \underline{a} = \underline{b}$$

donde la matriz H depende de las muestras $h(n)$.

6.- Filtro Adaptado: Dada una señal de energía finita de duración Q muestras (un pulso) $p(n)$, encuentre en vector de norma mínima cuyo producto escalar por el vector P (muestras de $p(n)$) es máximo. Si el vector diseñado se emplea como filtro para la señal $p(t)+w(t)$, siendo $w(t)$ ruido blanco, justifique que este permite la detección de la presencia del pulso y que en ese instante la relación señal a ruido a su salida es máxima.

7.- Considere que \underline{R}_s es la matriz que contiene el subespacio de señal y \underline{R}_n es la matriz que contiene el subespacio de ruido de una señal $x(n)$ de matriz de auto correlación la suma de ambas. Se pretende diseñar un FIR de la misma dimensión que estas de tal modo que se maximice la relación señal a ruido siguiente:

$$SNR = \frac{\underline{a}^H \underline{R}_s \underline{a}}{\underline{a}^H \underline{R}_n \underline{a}}$$

- Razone si la expresión anterior es correcta con su noción de relación señal a ruido.
- Compruebe que si se cambia \underline{R}_s por la matriz de auto correlación \underline{R} de $x(n)$ la maximización del nuevo cociente también consigue máxima relación señal a ruido.
- Demuestre que la solución óptima para el vector \underline{a} es el denominado autovector generalizado, asociado al autovalor máximo, y viene dado por

$$\underline{R} \underline{e} = \lambda_{max} \underline{R}_n \underline{e}$$

- Compruebe que la solución anterior es también solución para el caso de emplear la matriz \underline{R} .
- Compruebe que la máxima SNR es igual al autovalor máximo menos la unidad.
- Indique el filtro óptimo y la máxima SNR en el caso de que la matriz de señal sea de rango uno.
- Revise todos los resultados para el caso en el que el ruido sea blanco.

8.- Demuestre que el autovalor máximo de una matriz definida positiva es siempre estrictamente menor que su traza.

9.- Demuestre que si $J(\underline{A}) = \text{determinante}(\underline{A})$ entonces $\frac{\partial J}{\partial \underline{A}} = \text{adjunto}(\underline{A}^H)$.

10.- Demuestre que si $J(\underline{A}) = \underline{X}^H \underline{A}$ entonces $\frac{\partial J}{\partial \underline{X}} = \underline{A}^H$.

11.- Pruebe que $\text{Traza}[\underline{X}^H \underline{A} \underline{X}] = \sum_{n=1}^N \underline{X}_n^H \underline{A} \underline{X}_n$.

I.9 REFERENCIAS

- [1] J.H. McClellan and T.W. Parks. "Eigenvalue and eigenvector decomposition of the discrete Fourier Transform". IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, AU-20, pp. 66-74. March 1972.
- [2] G.H. Golub and C.F. Van Loan. "Matrix computations". Johns Hopkins Univ. Press. Baltimore. 1989.
- [3] G. Strang. "Linear algebra and its applications". Academic Press, New York, 1976.

- [4] R.A. Roberts and C.T. Mullis. "Digital Signal Processing". Addison-Wesley, Reading, MA, 1987.
- [5] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky and I.T. Young. "Signals and Systems". Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [6] J.G. Proakis, D.G. Manolakis. "Digital signal processing: Principles, algorithms and applications". Macmillan, New York, second edition 1992.
- [7] C.L. Lawson and R.J. Hanson. "Solving least squares problems". Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 1974.