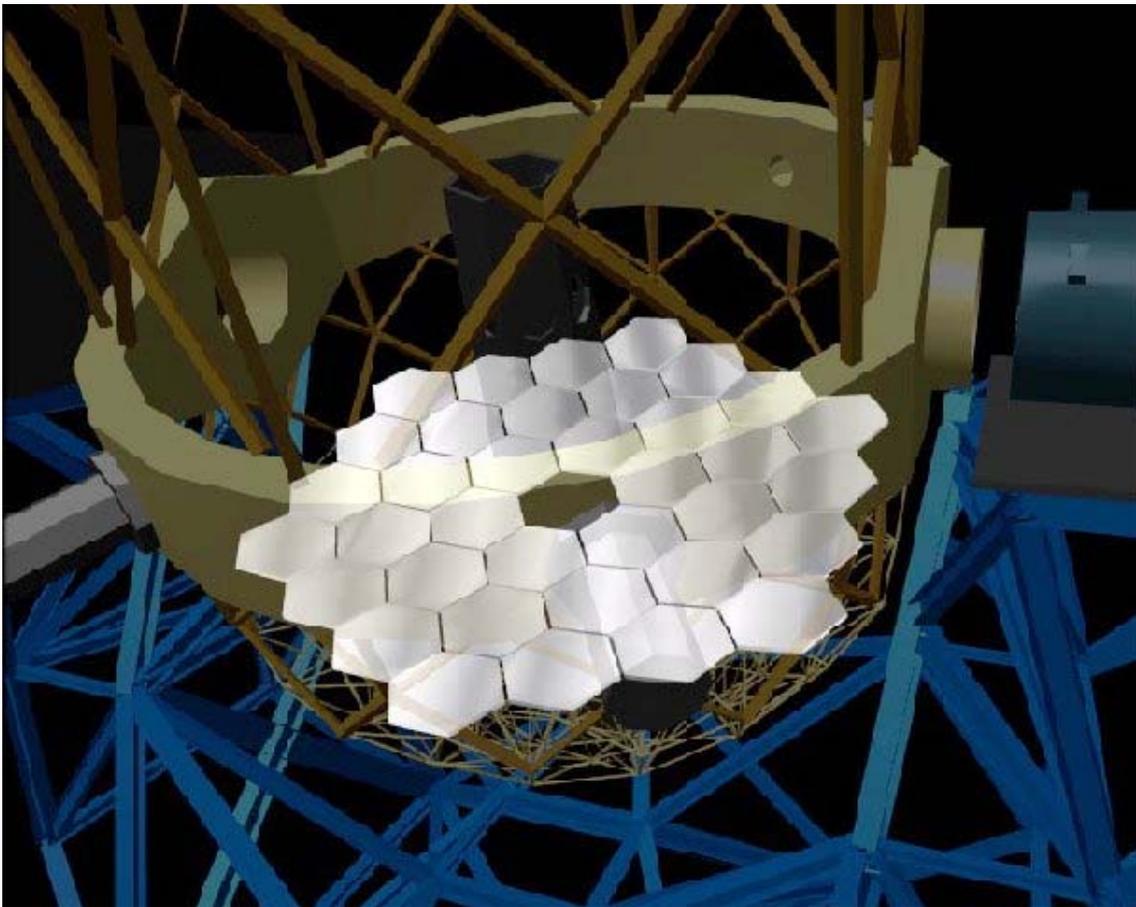


CAPITULO III

ESTIMACION DE ANGULO DE LLEGADA



- III.1. EL PROBLEMA DE ESTIMACION DE DOA Y ALTERNATIVAS BASICAS.
- III.2. ESTIMACION DE DOA EN BANDA ANCHA.
 - III.2.1. REDUCCION A PROBLEMAS DE BANDA ESTRECHA.
 - III.2.2. PROMEDIADO FRECUENCIAL
 - III.2.3. FOCALIZACION
 - III.2.4. FOCALIZACION PARA ULA.
- III.3. PHASED ARRAY (PA)
- III.4 EXPLORACION INDEPENDIENTE DE LOS DATOS (MLM Y NMLM).
- III.5 PREDICCION LINEAL (LP).
- III.6 METODOS SVD (MUSIC)
 - III.6.1. Reducción a subespacio de ruido
 - III.6.2. Ruido Coloreado.
- III.7 PREDICCION ESPACIAL: ESPRIT
- III.8 ESTIMACION DE DOA DE MAXIMA VEROSIMILITUD
- III.9 EL ALGORITMO EM
- III.10 METODOS DE BLOQUEO
- III.11 CONCLUSIONES
- III.13 REFERENCIAS

III.1 EL PROBLEMA DE ESTIMACION DE DOA Y ALTERNATIVAS BASICAS.

La estimación de dirección de llegada DOA (“Dirección Of Arrival”) es completamente similar al problema de análisis espectral. De hecho, cuando las fuentes son distribuidas la estimación de la densidad de potencia en cada dirección se plantea del mismo modo que el de la estimación de la densidad espectral de potencia. Así pues, salvo en las circunstancias en las que la diversidad espacial no introduce cambios con respecto al muestreo uniforme, habitual en densidad espectral, los estimadores de DOA son idénticos a los estimadores espectrales. Además, la situación habitual de fuentes puntuales, a efectos de la apertura, reduce el problema a la localización de rayas más que distribuciones. En cualquier caso, la riqueza de la diversidad espacial y la validez del modelo de escenario en arrays introduce cambios, mas o menos importantes, en todos lo métodos de análisis espectral antes de ser utilizados correctamente en arrays. Por ultimo, la inexistencia de modelos racionales para la señal recibida, para el “snapshot”, invalida la utilidad de estimadores ARMA o AR (estimación espectral paramétrica) en el problema de estimación de DOA.

La primera diferencia que la estimación de DOA plantea sobre la estimación espectral, al menos sobre la unidimensional, es que la posición de una fuente, aun en campo lejano, es habitualmente un problema bi-dimensional. La segunda diferencia es que, como podrá verse, lo que primero esta accesible es el “steering” de la fuente \underline{S}_o , y entre las componentes de este vector y los ángulos directores elevación y azimut no existe una relación lineal. Un sencillo análisis de sensibilidad revelaría que posiciones en el “broadside” son menos sensibles a errores de estimación en el “steering”; mientras que, la situación contraria se da en el “end-fire” de la apertura. Este hecho entraña que la resolución de cualquier método de estimación de DOA sea mayor en el “broadside” que en el “end-fire”, es decir, la resolución depende de la posición a estimar.

El objetivo de la estimación de DOA queda pues fijado en, dada una colección de “snapshots” con su correspondiente matriz de covarianza estimada, encontrar los vectores de enfoque de las fuentes presentes en el escenario. Por el momento, se asumirá que el numero de “snapshots” N disponibles es mayor que el numero de elementos de la apertura Q , asumiendo de este modo que la matriz de covarianza estimada esta bien condicionada. De manera practica, N ha de ser mayor que $2Q$ y los resultados entre el uso de la matriz exacta y estimada, en los correspondientes estimadores comienza a ser pequeño cuando N es mayor que $10.Q$.

Comenzando por el problema de banda estrecha, ha de tenerse presente que el modelo de “snapshot” y de matriz de covarianza siguen siendo (III.1). Añadiendo que, de existir fuentes coherentes su coherencia ha sido suprimida vía métodos de promediado espacial y que, por tanto, se consideraran todas las fuentes presentes en el escenario como incoherentes.

$$\begin{aligned} \underline{X}_n &= \underline{S}_s \cdot \underline{a}_n + \underline{w}_n \\ \underline{R} &= \underline{S}_s \cdot \underline{P} \cdot \underline{S}_s^H + \underline{R}_o = \sum_{r=1}^{NS} P(r) \cdot \underline{S}_r \cdot \underline{S}_r^H + \underline{R}_o \end{aligned} \quad (III.1)$$

También se asumirá que el array esta correctamente calibrado, por los que no existe ningún problema en pasar de los ángulos directores a formular el correspondiente vector de “steering”. La matriz de covarianza del ruido \underline{R}_o se asumirá diagonal, es decir, el ruido será espacialmente blanco. Estas restricciones relativas a incoherencia de las fuentes, calibración y ruido blanco serán suprimidas en ciertos métodos que permiten la estimación de DOA sin mayores problemas cuando el escenario no las cumple. De todas ellas, la menos restrictiva es la del ruido. En este sentido, note que siempre se puede trabajar con “snapshots blanqueados” y, si la matriz de ruido es no singular, de los nuevos vectores de “steering” pueden obtenerse los originales.

$$\begin{aligned} \underline{X}_{b,n} &= \underline{R}_o^{-1/2} \cdot \underline{X}_n \\ \underline{R}_b &= \underline{S}_{bs} \cdot \underline{P} \cdot \underline{S}_{bs}^H + \underline{I} \\ \underline{S}_s &= \underline{R}_o^{1/2} \cdot \underline{S}_{bs} \end{aligned} \quad (III.2)$$

Obviamente, se requiere el conocer a priori la matriz de ruido y que esta no sea singular, así permitirá la obtención de su raíz cuadrada. En cualquier caso, si el ruido proviene de los sensores, como suele ser el caso de propagación radio, este se comporta como no-direccional o blanco y puede obtenerse fácilmente su nivel a partir de la figura de ruido de las cadenas de conversión a banda base.

Al igual que en análisis espectral, las tentativas de estimación de DOA pueden agruparse en técnicas de exploración y de anulación. Se pasara a revisar brevemente ambas, comenzando por las de exploración. Como podrá verse la similitud con análisis espectral es casi total en estos metodos. De hecho, aunque no es muy conocido, los mejores procedimientos de análisis espectral nacieron de la mano de problemas de localización en diversidad espacial, es decir, fueron en sus comienzos metodos de detección de DOA.

La idea básica en exploración es recorrer secuencialmente en elevación y azimut la exploración con un conformador, en principio, dependiente de la dirección a la que se enfoca \underline{A} (se entiende $\underline{A}(\underline{S})$), de cuya potencia de salida se pretende obtener información de si en la dirección explorada se encuentra una fuente o no. La potencia se obtiene por un promedio, sobre los snapshots disponibles, del modulo al cuadrado de la salida del conformador.

$$y_s(n) = \underline{A}^H \cdot \underline{X}_n$$

$$P(\underline{S}) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N |y_s(n)|^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N \underline{A}^H \cdot \underline{X}_n \cdot \underline{X}_n^H \cdot \underline{A} = \underline{A}^H \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{A} \quad (\text{III.3})$$

Recuerdese que la matriz $\underline{\underline{R}}$, de no especificar lo contrario, se referirá a la estimada a partir de los “snapshots” y no a la teórica, se la denomina SCM (“Sample Covariance Matriz”).

En consecuencia, la estimación de la potencia en cada dirección se hace cambiando el enfoque del conformador, situándole en los ángulos a explorar, consiguiéndose así un diagrama de potencia versus ángulo/ángulos.

Al igual que en análisis espectral la calidad y problemas de estos métodos están íntimamente relacionados con la técnica empleada para el diseño del conformador. Si se asume que la dirección a enfocar, o que se va a explorar, tiene como vector de dirección el vector \underline{S} , la restricción de 0 dB. en esta dirección es obvia, y se escribirá según (III.4).

$$\underline{A}^H \cdot \underline{S} = 1 \quad (\text{III.4})$$

Si, además, se conoce la presencia de otras fuentes en otras direcciones, con el fin de evitar que estas introduzcan potencia en la potencia que falsearía la medida en la dirección enfocada, se pasaría a una formulación matricial de las restricciones.

$$\underline{A}^H \cdot \underline{\underline{C}}^H = \underline{f}^H \quad (\text{III.5})$$

Debiéndose recordar que una de las columnas, habitualmente la primera, que contiene el vector \underline{S} va a cambiar cuando se cambia el ángulo de enfoque, es decir, las restricciones cambian al proseguir la exploración.

En la Figura III.1 se puede ver un esquema que revela los problemas que entrañan los métodos de exploración. Se trata de medir la potencia que incide en la apertura desde una dirección. Como quiera que el conformador no tendrá respuesta nula desde el resto de direcciones, ruido y fuentes introducen un exceso de potencia que se denomina “leakage”. Si se imagina que se enfoca a la fuente situada en \underline{S}_q (es decir $\underline{S}=\underline{S}_q$) con un nivel de potencia P_q , es fácil comprobar la presencia del leakage y su valor, a partir de la expresión teórica de la matriz de covarianza,

$$P(\underline{S}_q) = P(q) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^{NS} P(r) \cdot \left| \underline{A}^H \cdot \underline{S}_r \right|^2 + \sigma^2 \cdot \underline{A}^H \cdot \underline{A} \quad (\text{III.6})$$

Asimismo, puede comprobarse que si las posiciones de las fuentes adicionales son conocidas a priori (en su totalidad no es posible) el “leakage” se puede reducir imponiendo restricciones al conformador.

Dejando de lado, por el momento, el diseño del conformador, y una vez obtenida la potencia en la dirección explorada, para encontrar la densidad de potencia, se hace necesario normalizar con el ancho de haz de la exploración. En análisis espectral, la normalización se justifico en base al denominado ancho de banda al ruido, con el fin de proporcionar otro punto de vista sobre la normalización mencionada, aquí se presentara de otro modo.

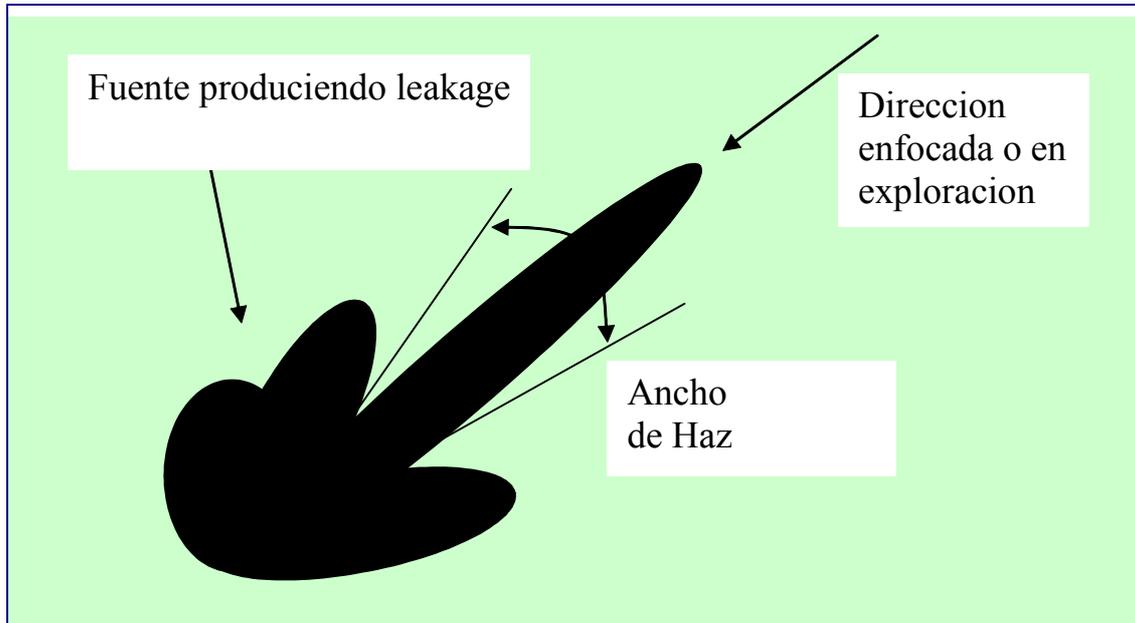


Figura III.1 Conformador de haz para estimación de DOA por exploración.

Nótese que, en cualquier dirección, la estimación de la densidad tiene al menos siempre una contribución que es la del ruido no direccional. En otras palabras, si la normalización es correcta, el término σ^2 es un sumando fijo en la estimación de la densidad, de este modo el método estaría calibrado, al menos, con respecto al ruido. Es decir, en un escenario sin fuentes, la densidad de potencia recibida debería de ser constante e igual a σ^2 . Por lo anterior, es claro que la normalización que calibra la estimación de densidad ha de ser la expresada en (III.7).

$$\Phi(\underline{S}) = \frac{P(\underline{S})}{\underline{A}^H \cdot \underline{A}} \quad (\text{III.7})$$

En resumen, los procedimientos de exploración, una vez diseñado el conformador para cada dirección proporcionan el estimador de potencia y de densidad de potencia según las expresiones que siguen, en función del conformador y de la SCM.

$$\begin{aligned} P(\underline{S}) &= \underline{A}^H \cdot \underline{R} \cdot \underline{A} \\ \Phi(\underline{S}) &= \frac{\underline{A}^H \cdot \underline{R} \cdot \underline{A}}{\underline{A}^H \cdot \underline{A}} \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

La segunda alternativa, denominada como métodos de anulación, al igual que en análisis espectral, se basa en el diseño de un solo conformador que anule todas las direcciones que muestran un contenido elevado (picos) de densidad de potencia. Del diagrama de radiación, más bien de su inversa, del conformador diseñado se obtienen las posiciones de las fuentes. En formulación, estos estimadores tiene la forma de (III.9). Aunque el diseño es de un solo conformador, la complejidad computacional de estos

estimadores es la misma que los anteriores pues la representación del estimador exige explorar según ángulo/s en el vector \underline{S} sobre todo el espacio. A modo de ejemplo, una resolución de 1° en azimut y 0.5° en elevación requiere para una apertura de 8 elementos ($9 \times 360 \times 180$) 583200 multiplicaciones complejas por cada exploración completa del entorno. Sirva este ejemplo para comprender que el costo computacional del diseño del conformador es despreciable frente al denominado “scanning” o barrido para producir la estimación en cada dirección posible.

$$\Phi(\underline{S}) = \frac{1}{|\underline{A}^H \cdot \underline{S}|^2} \quad (\text{III.9})$$

Ventajas y desventajas de unos y otros son similares a las expuestas en análisis espectral, destacando la superresolución alcanzada por los métodos de anulación y su mayor varianza con respecto a los de exploración, siempre, en términos generales.

Posponiendo de nuevo el diseño del conformador, el siguiente problema que aparece, este ya si específico de arrays, es el proceso de estimación de DOA en banda ancha. Antes de pasar a la exposición de cada uno de los métodos, se expondrá en la próxima sección como se procede y que peculiaridades ofrece el problema de banda ancha, donde el modelo de “snapshot” y de SCM no son validos, o al menos no directamente.

III.2. ESTIMACION DE DOA EN BANDA ANCHA.

Si hasta ahora bastaba con los ángulos directores para formular el “steering” de la dirección a enfocar en banda ancha, a esta información se le ha de añadir la derivada de la diversidad frecuencial que ahora posee el problema. El correspondiente estimador espectral será función de ángulos y frecuencia.

$$\Phi(\underline{S}) = \Phi(\theta, \varphi, f) \quad (\text{III.10})$$

Así pues la exploración en ángulos se ha de añadir ahora la de frecuencia, resultando en una representación de tres dimensiones para una apertura planar. La formulación del conformador, nivel de potencia y densidad, una vez derivado el conformador de exploración o anulación será exactamente la misma que en banda estrecha. En cualquier caso, se repetirá brevemente el diseño de conformadores en banda ancha.

Tomando como referencia el esquema de la Figura III.2, se puede observar la presencia de las dos diversidades básicas: la espacial y la temporal/frecuencial. La espacial se consigue con la posición de los sensores y la temporal con líneas de retardos sucesivos por cada sensor.

La elección del tamaño del conformador es sencilla a nivel espacial, y será igual al número de sensores para no sacrificar resolución espacial. A nivel temporal, el conformador procesara, digamos, $Nt+1$ muestras consecutivas. De este modo la salida del conformador en el instante n vendrá dada por:

$$y(n) = \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{NT} a_q(p) \cdot \underline{X}_{n-p} \quad (\text{III.11})$$

Esta ecuación se puede escribir de forma tradicional con la definición de conformador y “snapshot” de banda ancha.

$$\begin{aligned} \underline{A} &= [a_1(1), a_1(2), \dots, a_1(NT), a_2(1), \dots, a_Q(NT)]^T \\ \underline{X}_n^{wb} &= [x_1(n), x_1(n-1), \dots, x_1(n-NT), x_2(n), x_2(n-1), \dots, x_Q(n-NT)]^T \\ y(n) &= \underline{A}^H \cdot \underline{X}_n^{wb} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Para el diseño del conformador en exploración, o el “scanning” en anulación, el vector de “steering” de una dirección (θ, φ) a la frecuencia f viene dado por (III.13).

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \exp(ju_1), \exp(ju_1) \cdot \exp(j2\pi f), \dots, \exp(ju_1) \cdot \exp(j2\pi f \cdot Nt), \\ \exp(ju_2) \cdot \exp(j2\pi f), \dots, \exp(ju_2) \cdot \exp(j2\pi f \cdot Nt), \\ \dots, \dots, \dots, \\ \exp(ju_Q) \cdot \exp(j2\pi f), \dots, \exp(ju_Q) \cdot \exp(j2\pi f \cdot Nt) \end{bmatrix}^T \quad (III.13)$$

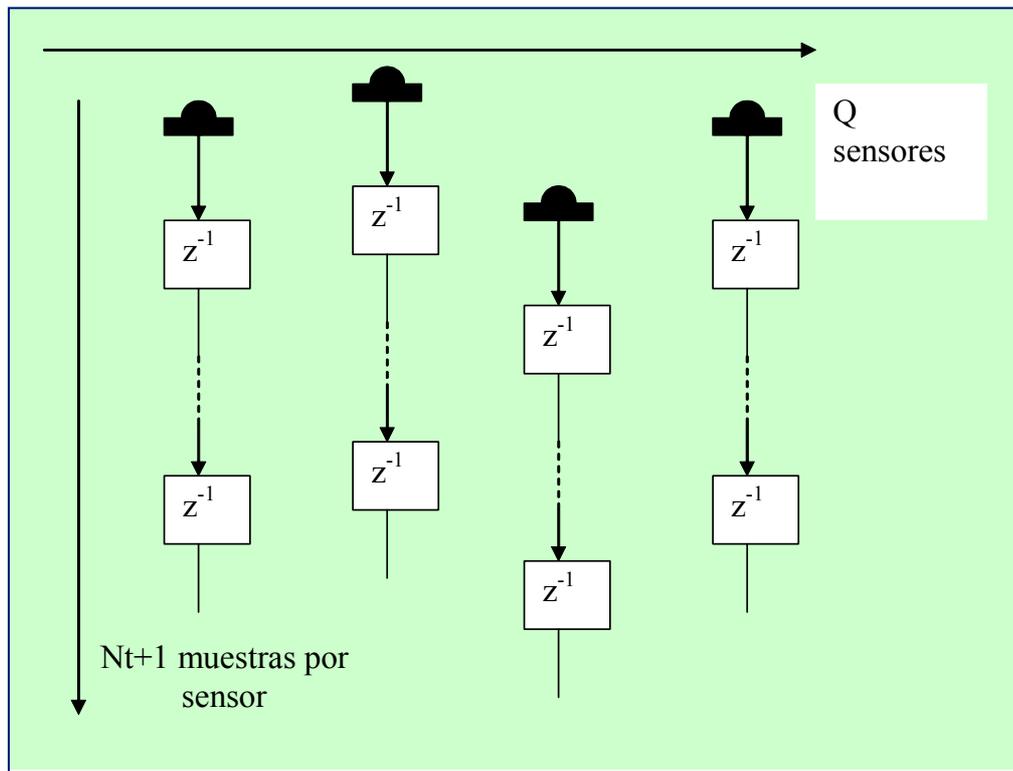


Figura III.2 Arquitectura de una apertura de banda ancha con Q elemento y Nt retardos por elemento.

Una vez derivado el estimador para cada ángulo y frecuencia, queda una cuestión y es que, pensando físicamente en el escenario, cada fuente de banda ancha esta en una posición, independiente de la frecuencia; sin embargo, el estimador obtenido por anulación o por exploración es diferente para cada frecuencia. La cuestión es que derivar la potencia o la densidad de potencia ha de hacerse en función del ángulo de llegada pero sumando todas las contribuciones que en cada frecuencia emite la misma fuente. En otras palabras, una fuente de la que se recibe 20 dB a la frecuencia de 40 KHz y 20 dB a la frecuencia de 45 KHz, en el resultado final ha de aparecer como una fuente de 23 dB en el ángulo correspondiente. En resumen, una vez derivado el estimador de la potencia para cada frecuencia y ángulo, el estimador ha de promediarse en la banda de proceso para obtener la potencia total que se recibe de cada dirección.

$$P(\theta, \varphi) = \int_{B_w} P(\theta, \varphi, f) \cdot df \quad (III.14)$$

Mientras que este proceso de estimación es valido para el estimador de la potencia recibida, no es correcto hacer lo mismo con el estimador de densidad, pues no existe un ancho de haz (en ángulo) para todo el conjunto de frecuencias a promediar. Es mas, en los métodos de anulación que proporcionan directamente un estimador de densidad el promediado no puede realizarse, lo que limita gravemente la utilidad de los métodos de anulación en banda ancha. Lo dicho no impide el promediar los estimadores de densidad, simplemente es que el promedio no tiene ahora ninguna justificación formal.

Claramente, el proceso de exploración, basados en un conformador, tienen sentido aquí solamente para la estimación de la potencia, pero no para la densidad que es la que proporciona la correcta localización de la fuente puntual. Se puede promediar potencia, pero no densidad.

En definitiva, todo lo que se puede hacer es simplemente medir potencia, vía un método de exploración y a continuación promediar en frecuencia según (III.14).

Aunque la exploración puede realizarse simultáneamente en espacio y frecuencia, diseñando el conformador correspondiente, en el apartado que sigue se vera una manera útil y eficiente computacionalmente para llevar a cabo la exploración en frecuencia. La idea es básicamente pasar, vía DFT, de un problema de banda estrecha a varios problemas de banda ancha.

III.2.1. REDUCCION A PROBLEMAS DE BANDA ESTRECHA.

Ante la dificultad surgida de tener que explorar simultáneamente espacio y frecuencia, un recurso eficiente es abordar el problema de banda ancha como múltiples problemas de banda estrecha. En concreto, se trata de vía DFT de las Nt muestras en cada sensor, realizada con M puntos (M -FFT, y $M \geq N_t$), obtener de cada segmento temporal en cada sensor M muestras que reflejen el contenido frecuencial de la señal de ese sensor. En definitiva, si \underline{X}_n es la matriz $N \times Q$ que contiene las muestras del snapshot en banda ancha y $\underline{\Gamma}$ es la matriz en cuya fila m se encuentra el vector (III.15). Al multiplicar dicha matriz por (III.16), se obtendrá una representación del problema de banda ancha en M problemas de banda estrecha (Uno por cada punto de la DFT).

$$\left[1, \exp(-j2\pi \frac{m}{M}), \dots, \exp(-j2\pi \frac{m \cdot Nt}{M}) \right] \quad (III.15)$$

$$\underline{X}_n = \begin{bmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_Q(n) \\ x_1(n-1) & x_2(n-1) & \dots & x_Q(n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(n-Nt) & x_2(n-Nt) & \dots & x_Q(n-Nt) \end{bmatrix} \quad (III.16)$$

De este modo, se obtiene otra matriz de $M \times Q$ cuyas filas contienen snapshots de la apertura, todos en el instante n y a la frecuencia m/MT siendo T el periodo de muestreo temporal.

$$\underline{\Gamma} \cdot \underline{X}_n = \begin{bmatrix} \underline{X}_{n,1}^T \\ \dots \\ \underline{X}_{n,m}^T \\ \dots \\ \underline{X}_{n,M}^T \end{bmatrix} \quad (III.17)$$

Es decir, vía DFT o FFT, por cada “snapshot” de banda ancha se obtienen M “snapshots” de banda estrecha, como se había mencionado. Note que el numero de muestras temporales fijan la resolución frecuencial de los “snapshots” en $1/MT$ Hz. y es dicho ancho de banda el que ha de satisfacer el criterio de banda estrecha expuesto en el Capitulo I. Luego recuerde que el tamaño M lo determina la condición de banda estrecha y el periodo de muestreo de las líneas de retardo de cada sensor. Una vez determinado M , puede ocurrir que no todas las M frecuencias sean de interés, en lo que sigue, se entiende que el proceso se realiza solo para aquellas bandas donde se sospecha puede estar presente alguna fuente.

Una vez obtenidos los “snapshots” de banda estrecha, puede estimarse la matriz de covarianza para cada frecuencia como (III.18). Estas matrices de covarianza de banda estrecha si que admiten cada una el modelo tradicional de banda estrecha y puede procederse a estimar la potencia versus dirección a partir de cada una de ellas.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{R}}(f) \Big|_{f=m/MT} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underline{X}_{n,m} \cdot \underline{X}_{n,m}^H = \\
&= \sum_{s=1}^{NS} \underline{P}_s(f) \cdot \underline{S}_s(f) \cdot \underline{S}_s^H(f) + \sigma^2(f) \cdot \underline{I} = \\
&= \underline{S}(f) \cdot \underline{P}(f) \cdot \underline{S}^H(f) + \sigma^2(f) \cdot \underline{I}
\end{aligned} \tag{III.18}$$

Llegado a este punto, los estimadores, a cada frecuencia se derivan a partir de esta matriz de covarianza usando un método de exploración de banda estrecha. No obstante, se sigue en el punto de crisis donde se obtienen M estimadores a M frecuencias diferentes, y se requiere llegar a un mapa de estimación donde tan solo figure potencia o densidad versus ángulo, sin dependencia con la frecuencia. El avance es que ahora se esta en disposición de utilizar las matrices de (III.18) para conseguir el estimador de potencia en cada banda.

El primer procedimiento es aproximado y tan solo constituye una solución parcial al problema. El segundo procedimiento es correcto y constituye, hoy por hoy, el único método correcto para la estimación de DOA en banda ancha. Ambos procedimientos se describirán a continuación. El primero es un promedio directo, con problemas formales para poder llevarse a cabo, y el segundo es la solución a dichos problemas.

III.2.2. PROMEDIADO FRECUENCIAL.

Dentro de la estimación de DOA en banda ancha ocurre, en ciertas ocasiones que las fuentes no ocupan, una por una, un ancho de banda grande. Si el ancho de banda que alrededor de, digamos, f_o (m_o) ocupa una fuente determinada es B_o ($2M_o+1$), para su localización puede promediarse la matriz espectral (III.18) en el margen correspondiente y sobre la matriz promediada llevar a cabo cualquiera de los procedimientos que mas adelante se expondrán, ya sean de anulación o de exploración. La determinación de la frecuencia central y del ancho de banda se derivan del contenido espectral de las FFTs en $m=0$, $M-1$.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{R}}_{prom}(f_o) &= \int_{f_o-(B_o/2)}^{f_o+(B_o/2)} \underline{\underline{R}}(f) \cdot df \\
&\text{o bien}
\end{aligned} \tag{III.19}$$

$$\underline{\underline{R}}_{prom}(m_o) = \sum_{m_o-M_o}^{m_o+M_o} \underline{\underline{R}}(m)$$

El problema del promediado frecuencial es obvio después de observar (III.18). El contenido espectral de la matriz promediada debería ser igual a (III.20), de este modo la densidad espectral se sumaria coherentemente y cualquier procedimiento de estimación de los que se expondrán para banda estrecha proporcionaría, en la banda seleccionada la posición de las fuentes. La expresión (III.20) puede verse como si toda la contribución espectral que la fuente distribuye en “steerings” a lo largo de su ancho de banda se concentrase en la frecuencia central. Es pretender que la fuente colapse toda su contribución espectral en una sola frecuencia, quedando asi un problema de banda estrecha.

$$\underline{\underline{R}}_p(f_o) = \underline{S}(f_o) \cdot \int_{f_o-(B_o/2)}^{f_o+(B_o/2)} \underline{P}(f) \cdot df \cdot \underline{S}^H(f_o) + \underline{I} \int_{f_o-(B_o/2)}^{f_o+(B_o/2)} \sigma^2(f) \cdot df \tag{III.20}$$

Examinado con detalle las dos últimas expresiones, es claro que si existe alguna diferencia se debe a que, como se expresa en (III.21), el vector de “steering” cambia con la frecuencia. Este cambio es mas significativo cuanto mayor es el ancho de banda donde se desea promediar.

$$\underline{\underline{S}}(f_o) \neq \underline{\underline{S}}(f) \Big|_{f=f_o} \tag{III.21}$$

Así pues, tan solo cuando el intervalo de integración es pequeño como para que se verifique la suposición de banda estrecha, banda no muy grande, se podrá asumir que (III.21) se verifica aproximadamente. Cuando esta aproximación no es posible se ha de recurrir a los denominados métodos de focalización que se describen en la siguiente subsección.

III.2.3. FOCALIZACION.

El que los vectores de dirección de las fuentes, en la practica no mas de dos a cuatro en la mayor parte de las aplicaciones, no verifiquen la relación (III.21) en el ancho de banda de estas, hace necesario el proceder a una transformación antes de promediar frecuencialmente.

La idea es diseñar una transformación $\underline{T}(f)$ tal que permita focalizar los “steering vectors” de las fuente a la frecuencia central f_o , también denominada de focalización. En otras palabras se trata de encontrar para la transformación que verifique (III.22).

$$\underline{T}(f) \cdot \underline{S}(f) = \underline{S}(f_o) \quad (III.22)$$

Al mismo tiempo, se ha de mantener el carácter blanco del ruido o , de otro modo, la propia transformación provocaría máximos y mínimos de densidad que no existirían en el escenario. Así pues, la restricción es que la transformación ha de verificar (III.23).

$$\underline{T}(f) \cdot \underline{T}^H(f) = \underline{I} \quad (III.23)$$

El uso de la transformación, que focaliza todo a la frecuencia central, si que permitiría realizar el promedio de las matrices de covarianza en la seguridad de que ello tan solo acarrea la suma de la potencia de las fuentes en todo su ancho de banda.

$$\underline{R}_{prom} = \int_{f_o - (B_o/2)}^{f_o + (B_o/2)} \underline{T}(f) \cdot \underline{R}(f) \cdot \underline{T}^H(f) \cdot df \equiv \underline{R}_p \quad (III.24)$$

En cualquier caso, la formulación de las matrices de direcciones requiere de un conocimiento previo o aproximado de la posición de las fuentes. Esta posición estimada se obtiene de cualquier procedimiento de los que permiten el promediado en frecuencia de la potencia (ver apartado de phased array o de mínima varianza mas adelante). Un conocimiento aproximado empleado en el proceso de focalización consigue al final resoluciones muy elevadas. Veamos el diseño de la matriz de transformación.

En primer lugar, al margen de que no sea recomendable por las razones expuestas previamente, si se suprime la restricción de matriz unitaria, la solución es sencilla e igual a (III.25). El problema es que esta solución, al no ser unitaria, colorea el ruido espacial en la matriz focalizada.

$$\begin{aligned} \underline{T}(f) &= \underline{S}(f_o) \cdot [\underline{S}^H(f) \cdot \underline{S}(f)]^{-1} \cdot \underline{S}(f) \\ \underline{T}(f) \cdot \underline{T}^H(f) &= \underline{S}(f_o) \cdot [\underline{S}^H(f) \cdot \underline{S}(f)]^{-1} \cdot \underline{S}(f_o) \end{aligned} \quad (III.25)$$

El hecho que el ruido espacial resulte coloreado convierte en engorrosos la mayor parte de los procedimientos que siguen aparte de introducir problemas en la calidad de la estimación conseguida.

Por esta razón, y debido a que una solución al diseño planteado no existe, más que obviar la restricción unitaria, lo que se hace es mantener la restricción (III.23) y relajar la focalización (III.24). En concreto, se diseña la transformación unitaria que minimiza el error de focalización. Dicho error se controla vía la norma de Frobenius del residuo de focalización.

$$\left[\underline{T}(f) \quad -\underline{I} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \underline{S}(f) \\ \underline{S}(f_o) \end{array} \right]_F^2 \quad (III.26)$$

La solución a este problema se deriva a partir de la descomposición en valores singulares de la matriz siguiente:

$$\underline{S}(f) \cdot \underline{S}^H(f_o) = \underline{U} \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{V}^H \quad (III.27)$$

La solución (Ver apéndice III.A.1) para la transformación es (III.28).

$$\underline{T}(f) = \underline{V} \cdot \underline{U}^H \quad (III.28)$$

Los dos métodos de focalización anteriores tienen una dependencia con el ángulo que se incluye en las formulaciones de las matrices de direcciones como ya se ha comentado. Así pues se ha de disponer, al menos tentativamente de donde están las fuentes. Ese conocimiento se obtiene de métodos de exploración con “scanning” grosero, digamos de 5° de resolución. Al aplicar los métodos de exploración sobre la matriz focalizada se obtendrán resoluciones que lleguen a la centésima de grado.

Otra posibilidad, sobre todo en el caso de un conocimiento muy vago de la posición de las fuentes, es realizar la focalización en un ángulo sólido. Por ejemplo, en un array lineal, la matriz de focalización a la frecuencia f sería aquella que minimiza la expresión (III.29), cuya solución es directa a partir de lo expuesto anteriormente.

$$\int_{\Omega \in \Omega_0} \left| \underline{T}(f) \cdot \underline{S}(f, \theta) - \underline{S}(f_o, \theta) \right|_F^2 \cdot d\theta \quad (III.29)$$

Por ultimo, otro método de focalización, en principio únicamente para el caso de una apertura lineal uniforme, puede realizarse de un modo mas grafico e intuitivo que los anteriores, tal y como se describirá a continuación.

III.2.4. FOCALIZACION EN ULA.

Para un array lineal uniforme (ULA) el “snapshot” matricial de banda ancha \underline{X}_n contiene, por filas, muestras temporales, y por columnas, sensores equi-espaciados. Esta estructura permite realizar una DFT bidimensional generando una imagen en la que se situara en abcisas la frecuencia espacial y en ordenadas la frecuencia temporal. La expresión de la doble DFT es la que se expresa en (III.30).

$$X(u, f, n) = \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^Q X_{m,q} \cdot \exp(-j2\pi f m T) \cdot \exp(-j2\pi q u) \quad (III.30)$$

Donde u es la frecuencia espacial y viene dada por (II.31), siendo f la frecuencia temporal, T es el periodo de muestreo, d la separación entre elementos, θ la elevación, y c la velocidad de propagación.

$$u = \frac{f \cdot d}{c} \cdot \text{sen}(\theta) \quad (III.31)$$

Tomando el modulo de la expresión (III.30) y promediando en n se obtiene un periodograma 2-D que contiene una estimación del nivel de potencia en cada frecuencia temporal y espacial X(u,f).

Note que ha diferencia de procesado de imagen, una dimensión esta relacionada con la otra, es decir, la frecuencia espacial depende de la frecuencia temporal. Además la presencia de la elevación fija un valor máximo de cada frecuencia temporal si se fija la espacial y viceversa.

$$f = \frac{c}{d \cdot \sin(\theta)} \cdot u \leq [\text{para } 90^\circ] < \frac{c}{d} \cdot u$$

$$u \leq \frac{f \cdot d}{c}$$
(II.32)

Estas expresiones indican que de la imagen $X(u, f)$ en su periodo fundamental, i.e. $u \in [-0.5, 0.5]$ y $f \in [0, 1/T]$ existe una zona que carece de sentido físico, y que es la que no verifica (II.32). En la Figura III.3 puede verse dicha zona sombreada. En los bordes de dicha zona, a izquierda y derecha, se encuentran los ángulos de elevación de -90° y 90° . También es de destacar que en este caso dibujado la frecuencia de muestreo se ha elegido igual a c/d lo que equivale a una separación de elementos igual a $\lambda/2$ la frecuencia máxima (i.e. la mitad de la de muestreo).

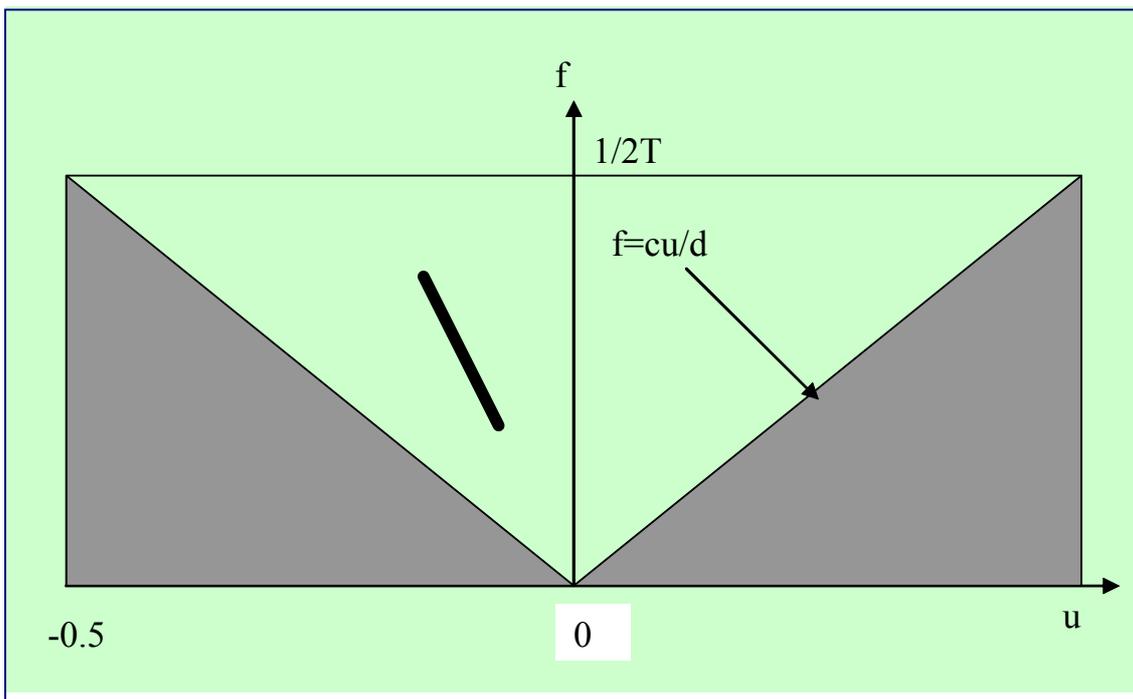


Figura III.3. Plano frecuencial (espacio-tiempo) para un array ULA. La línea gruesa marca una fuente situada en una elevación negativa y con un ancho de banda aproximadamente la cuarta parte de la frecuencia de muestreo.

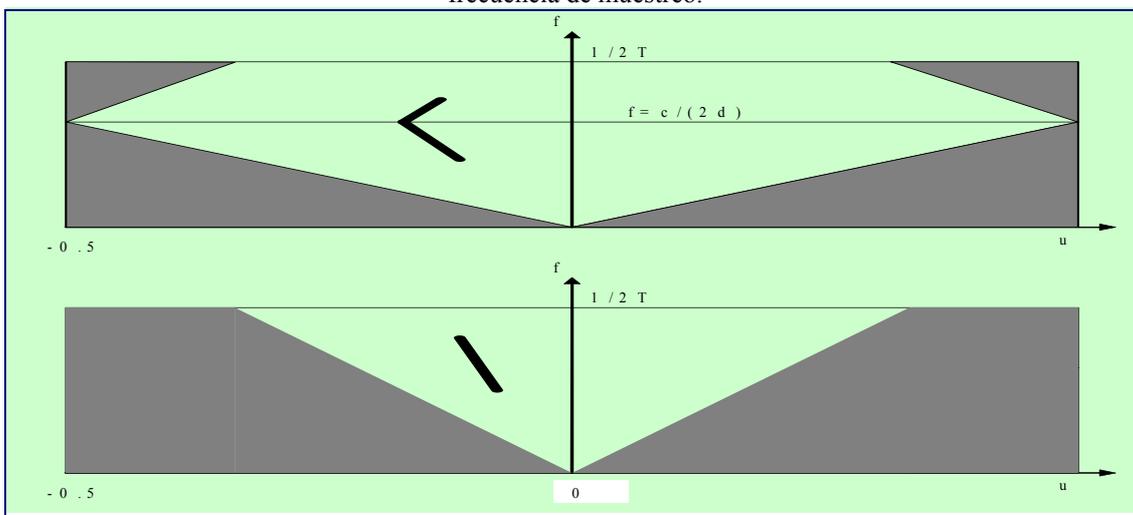


Figura III.4. Arriba, máxima resolución espacial (ancho de la zona visible) en frecuencia levemente inferior a la máxima. Abajo, diseño erróneo con sensores demasiado próximos para la banda de frecuencias a observar.

Eligiendo una frecuencia de muestreo superior conforma la zona no valida como se indica en la Figura III.4, en su parte superior, lo cual es un problema a la hora de focalizar pero espacialmente no se pierde resolución. Equivale a una d superior a la longitud de onda dividida por dos en una frecuencia inferior a la máxima. Lo que no debe ocurrir es la situación de la misma figura en su porción inferior pues en este caso, como se comprobaba y es fácil de intuir, la zona 'visible' de la apertura se reduce. Esta situación equivale a una separación de elementos inferior a $\lambda/2$ en todo el margen visible.

Sin pérdida de generalidad se tomara en lo que sigue el caso de la Figura III.3.

Como puede verse del grafico o de las formulas, una fuente en una elevación dada, firma con una línea que apunta al origen y en un margen de frecuencias según su ancho de banda. Es decir, el spreading de la potencia de las fuentes en este mapa es diagonal y revela de qué modo se ha de hacer la focalización. Antes de proseguir, nótese como a medida que baja la frecuencia el margen visible de la apertura (-90,90) en elevación se reduce, es decir, al bajar la frecuencia es como si el array se hiciese mas pequeño lo que es lógico pues aumenta la longitud de onda. El efecto es que, dado una respuesta del conformador esta se ve 'restringida' al margen visible y, como muestra la figura III.5, la resolución se degrada mucho.

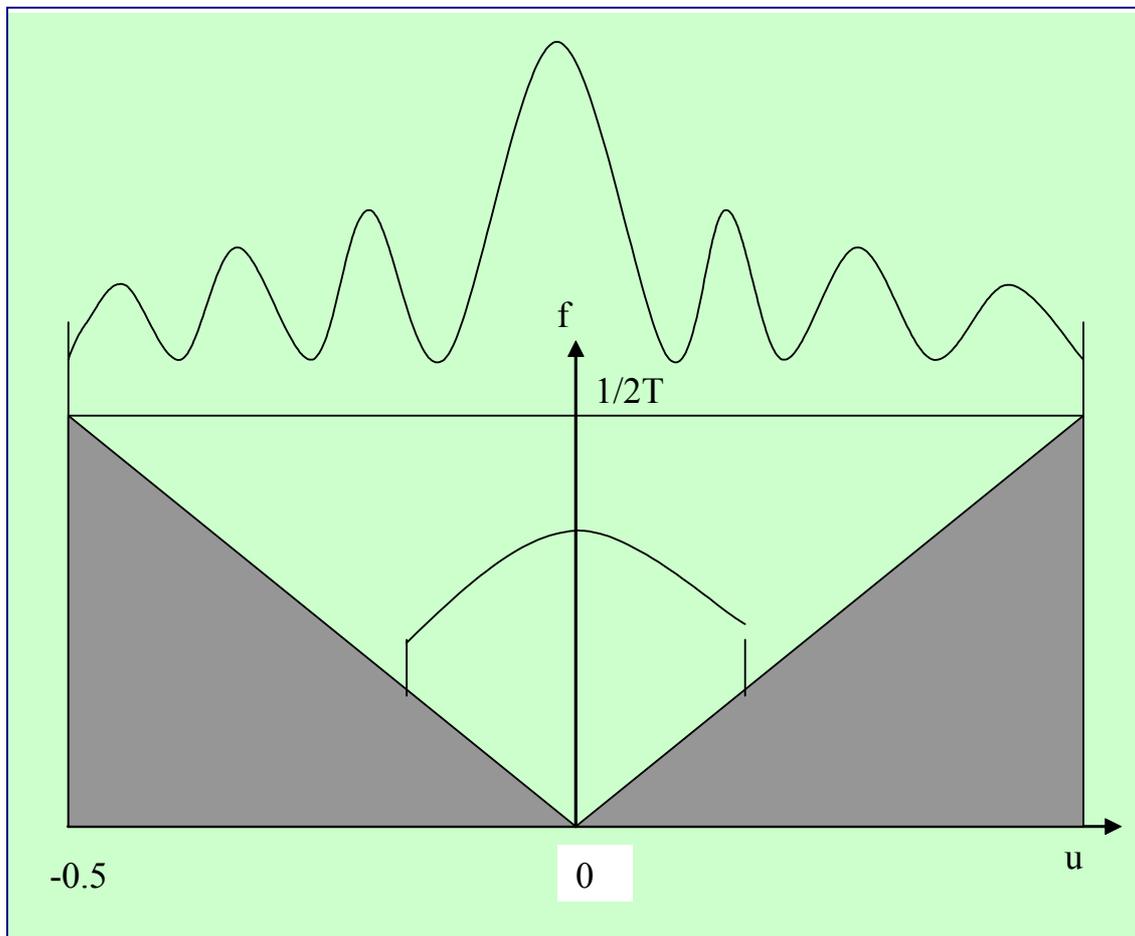


Figura III.5. Pérdida de resolución con la frecuencia.

Volviendo al problema de focalización, claramente al promediar según líneas convergentes al origen se consigue focalizar sin error ninguno, la potencia de cada fuente.

$$P(\theta) = \iint_{f[0,0.5]u=fd \operatorname{sen}(\theta)/c} X(f, \theta).df .du \quad (\text{II.33})$$

Finalmente por DFT inversa de este periodograma, se obtienen los elementos de la matriz de covarianza focalizada y sobre la que se pueden aplicar los procedimientos de estimación de DOA que siguen en el presente capítulo.

La extensión de este sencillo y eficiente método de focalización a otras aperturas lineales o planares pasa por un problema de interpolación espacial o, también denominada, re-muestreo espacial para conseguir datos uniformes también en espacio.

Vistos los procedimientos convenientes para banda ancha, y que reducen el problema al uso de métodos de banda estrecha, se comenzara en el siguiente apartado con el primero, y mas sencillo, de dichos métodos.

III.3 PHASED-ARRAY.

El primer método de diseño del conformador para un método de exploración es el denominado “phased array”, equivalente a los métodos de Fourier y/o Periodograma en análisis espectral. La exploración llevada a cabo con un “phased array” conlleva el diseño más sencillo del conformador de exploración. Se dice que es el mas sencillo porque el conformador se diseña solo bajo la restricción de 0 dB. en la dirección enfocada, y asume que el único leakage es debido a ruido no-direccional. En definitiva, sus ecuaciones de diseño son las que se exponen en (III.34).

$$\begin{aligned} \underline{A}^H \cdot \underline{S} &= 1 \\ \underline{A}^H \cdot \underline{A} \Big|_{min} & \end{aligned} \quad (III.34)$$

Su solución, salvo una constante es el “steering” asociado a la dirección explorada.

$$\underline{A} = \frac{\underline{S}}{\underline{S}^H \cdot \underline{S}} = \frac{1}{Q} \cdot \underline{S} \quad (III.35)$$

Con un ancho de banda al ruido BN igual a (II.36) independiente de la dirección enfocada.

$$\underline{A}^H \cdot \underline{A} = \frac{1}{Q} \quad (III.36)$$

Nótese que el conformador, depende de la dirección enfocada pero no depende de los datos o el escenario. Por esta razón, a veces a él y sus variantes se les denomina como métodos de exploración independientes de los datos.

La potencia estimada y la densidad de potencia se obtienen de sustituir la expresión del conformador en las expresiones generales vistas en la primera sección de este capítulo.

$$\begin{aligned} P(\theta, \varphi) &= P(\underline{S}) = \underline{A}^H \cdot \underline{R} \cdot \underline{A} = \frac{1}{Q^2} \cdot \underline{S}^H \cdot \underline{R} \cdot \underline{S} \\ \Phi(\theta, \varphi) &= \Phi(\underline{S}) = \frac{\underline{A}^H \cdot \underline{R} \cdot \underline{A}}{\underline{A}^H \cdot \underline{A}} = \frac{1}{Q} \cdot \underline{S}^H \cdot \underline{R} \cdot \underline{S} \end{aligned} \quad (III.37)$$

Como puede verse la estimación de DOA con un phased array, debido al conformador utilizado, es completamente idéntica a los métodos basados en el periodograma para análisis espectral. Su resolución es muy baja, y su carácter óptimo queda reservado tan solo a la presencia de una sola fuente en ruido espacialmente blanco, como podrá verse en el próximo apartado.

En la Figura III.6 puede verse el estimador de DOA para una apertura lineal de 15 elementos y dos fuentes de 10 dB. situadas en 0 y -20° respectivamente. El numero de snapshots utilizados en la

estimación de la matriz de covarianza fueron 3000. El “scanning” esta realizado con una precisión de 0.2° .

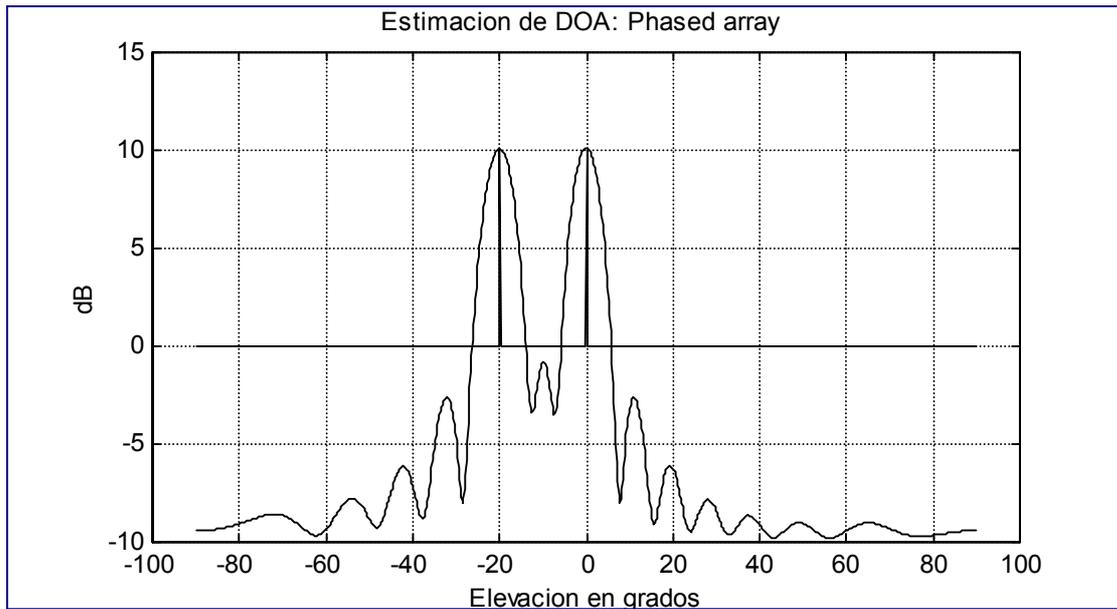


Figura III.6 Estimador de DOA con phased array. Apertura lineal.

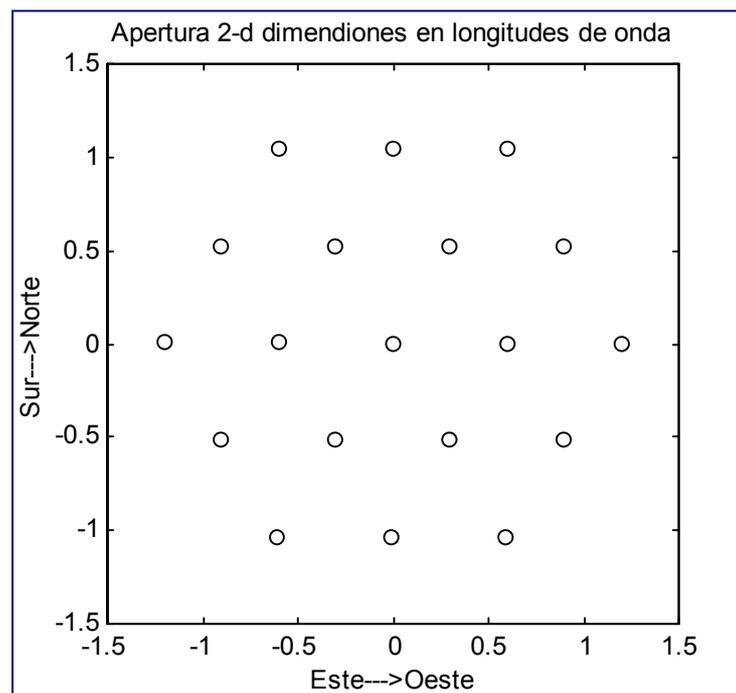


Figura III.7. Apertura planar empleada para el caso de estimación 2-d. Es una apertura de muestreo entrelazado o hexagonal centrado

En la Figura III.7 se puede ver el caso de la apertura 2-D utilizada de 19 elementos. En las dos siguientes figuras se puede ver el correspondiente estimador. Las fuentes estaban situadas a 30 y 40 grados de elevación y 10 y 210 de azimut. Se trata de fuentes incoherentes y ambas de un nivel de 20 dB. Nótese como la baja resolución de este procedimiento acarrea un fuerte “leakage” en zonas donde no existe ninguna fuente. Aproximando estas en posición impediría la observación de ambas con nitidez adecuada.

Las estimaciones con phased array, para el escenario descrito en el texto se presentan a continuación.

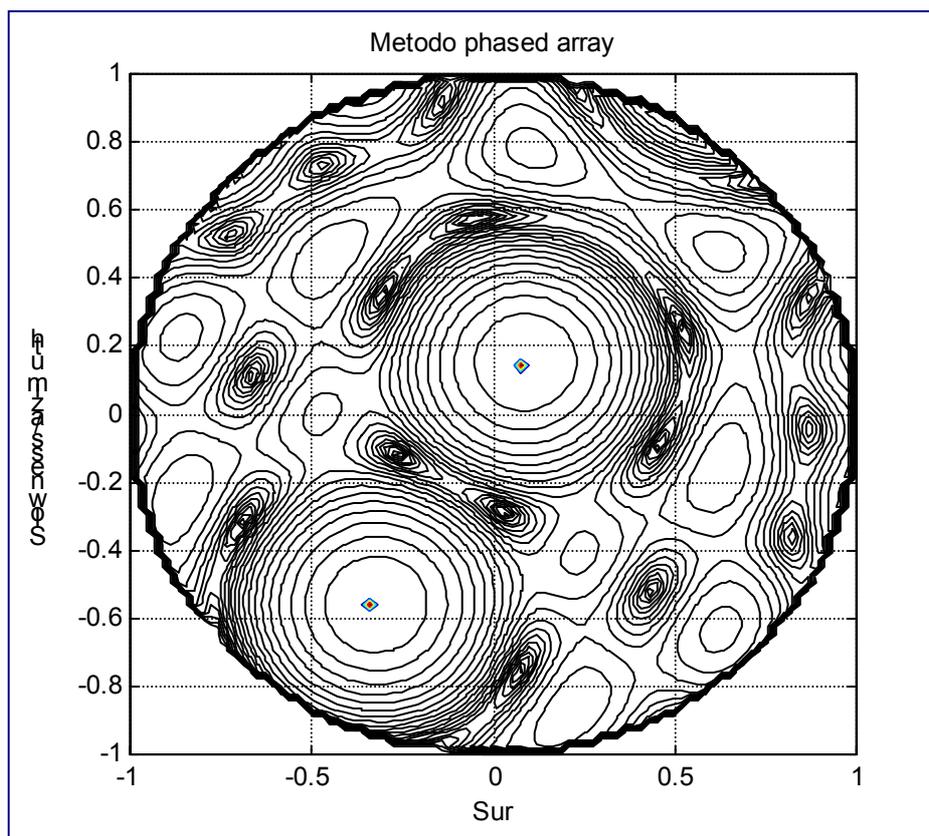
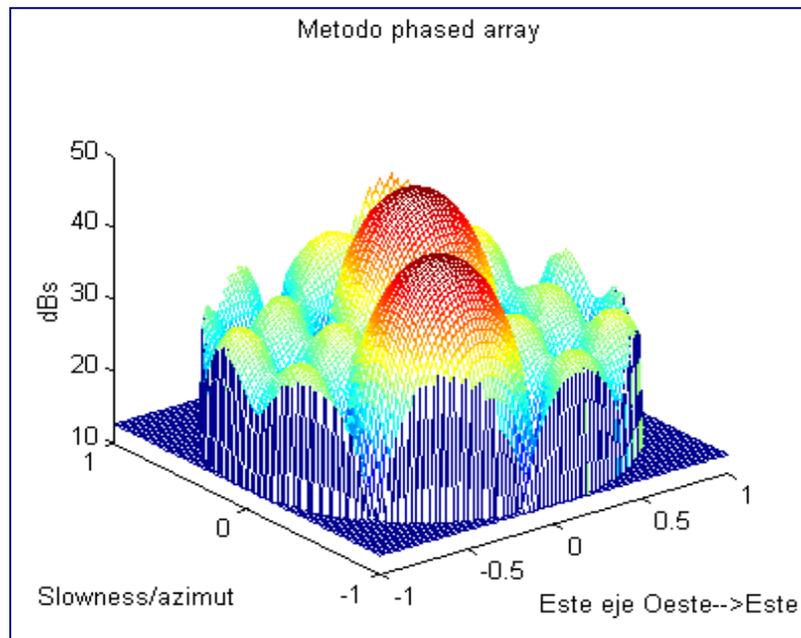


Figura III.8. Estimador de DOA en representación 3-D y mapa de contornos donde se aprecia correctamente la posición de las dos fuentes presentes en el escenario.

III.4 EXPLORACION DEPENDIENTE DE LOS DATOS.

Como ha podido observarse en el apartado anterior, el conformador usado para explorar cada dirección era el mismo, y lo que es más importante, independiente de la dirección explorada. La consecuencia inmediata es que dicho conformador incluye un leakage de otras direcciones que introducen un sesgo notorio en la estimación de la potencia recibida. Parece obvio que si se encuentra una fuente o mas en diversas direcciones, dichas fuentes deberían ser anuladas o minimizadas cuando se explora otra dirección. En definitiva, el conformador debería estar enfocado en la dirección a explorar y, al mismo tiempo minimizar toda la contribución desde el resto de direcciones. Es decir, el conformador dependerá del escenario y, en concreto, de la dirección que en cada momento se explora.

Al igual que en análisis espectral, el diseño del conformador que explora la potencia recibida en la dirección \underline{S} , debe verificar la restricción de enfoque en dicha dirección.

$$\underline{A}^H \cdot \underline{S} = 1 \quad (III.38)$$

En relación con la restricción de minimizar el leakage o contribución del resto de direcciones y ruido, nótese que la matriz de covarianza puede escribirse como (II.39), donde α es la potencia a estimar, \underline{S} es la dirección explorada y \underline{R}_o el resto de contribuciones.

$$\underline{R} = \alpha \cdot \underline{S} \cdot \underline{S}^H + \underline{R}_o \quad (III.39)$$

Minimizar el leakage equivale a minimizar la forma cuadrática correspondiente a la segunda matriz. No obstante, y debido a la restricción, esto equivale a efectuar la minimización sobre la matriz total, como puede verse en (II.40).

$$\underline{A}^H \cdot \underline{R}_o \cdot \underline{A} \Big|_{min} = \underline{A}^H \cdot \underline{R} \cdot \underline{A} - \alpha \left| \underline{A}^H \cdot \underline{S} \right|^2 \Big|_{min} \propto \underline{A}^H \cdot \underline{R} \cdot \underline{A} \Big|_{min} \quad (III.40)$$

La solución de esta minimización con restricciones es inmediata, y las expresiones del conformador y la potencia estimada son las que siguen:

$$\underline{A} = \frac{\underline{R}^{-1} \cdot \underline{S}}{\underline{S}^H \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{S}}$$

$$P(\underline{S}) = \frac{1}{\underline{S}^H \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{S}} \text{ watts} \quad (III.41)$$

La expresión (II.41) proporciona una estimación de la potencia recibida en la dirección explorada, dado que para localización se precisa de la densidad, es decir, potencia por ancho de haz, el estimador de densidad ha de normalizarse por el ancho de banda al ruido. Dicho ancho de banda viene dado por la norma del conformador.

$$S(\underline{S}) = \frac{P(\underline{S})}{\underline{A}^H \cdot \underline{A}} = \frac{\underline{A}^H \cdot \underline{R} \cdot \underline{A}}{\underline{A}^H \cdot \underline{A}} = \frac{\underline{S}^H \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{S}}{\underline{S}^H \cdot \underline{R}^{-2} \cdot \underline{S}} \quad (III.42)$$

Esta normalización de la potencia también puede verse de otro modo. Si se supone que el escenario explorado tan solo contiene ruido no direccional de potencia σ^2 , es decir la matriz de covarianza es diagonal. Puede verse que el estimador de potencia sería el valor anterior por la norma del conformador, por lo que el estimador de densidad debería de dividirse por dicha norma como se ha hecho en (II.42). De este modo el estimador de densidad queda calibrado para ruido blanco y preparado para trabajar en cualquier escenario.

Las figuras que siguen muestran para la apertura del apartado anterior tanto la lineal como la planar, la calidad del estimador de potencia y de densidad respectivamente.

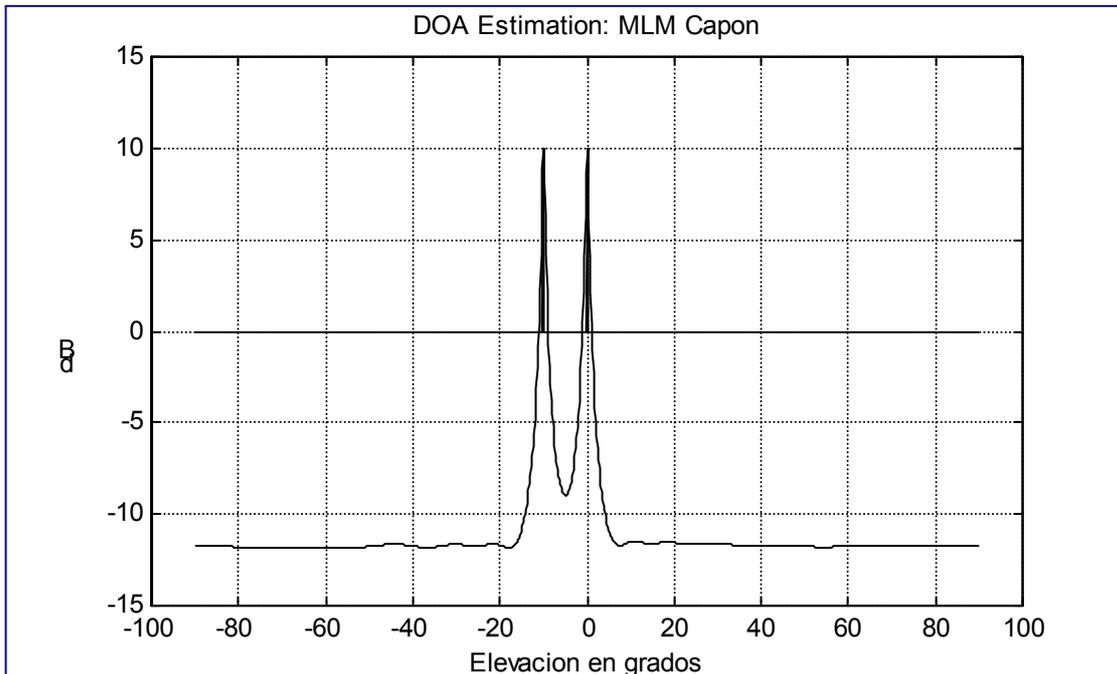


Figura III.9. Estimador del nivel de potencia. MLM de Capon para apertura lineal de 15 elementos.

De la figura puede verse como el estimador de potencia resuelve perfectamente las dos fuentes, a 0 y -10 grados. Que la estimación o altura es exactamente la potencia de las fuentes, 10 dB. cada una y que el nivel de ruido, en el escenario a 0 dB. pasa a estar a $10 \log(15)$ dB por debajo como corresponde a un conformador de 15 elementos. Obsérvese la planicidad del estimador y la diferencia con phased arrays en calidad aunque las fuentes están ahora separadas 10 grados en lugar de veinte.

Si se aproximan mas las fuentes en posición el estimador de potencia será incapaz de separarlas. Esto puede verse en la Figura III.10. Ahora las fuentes están separadas tan solo dos grados (0 y -2)

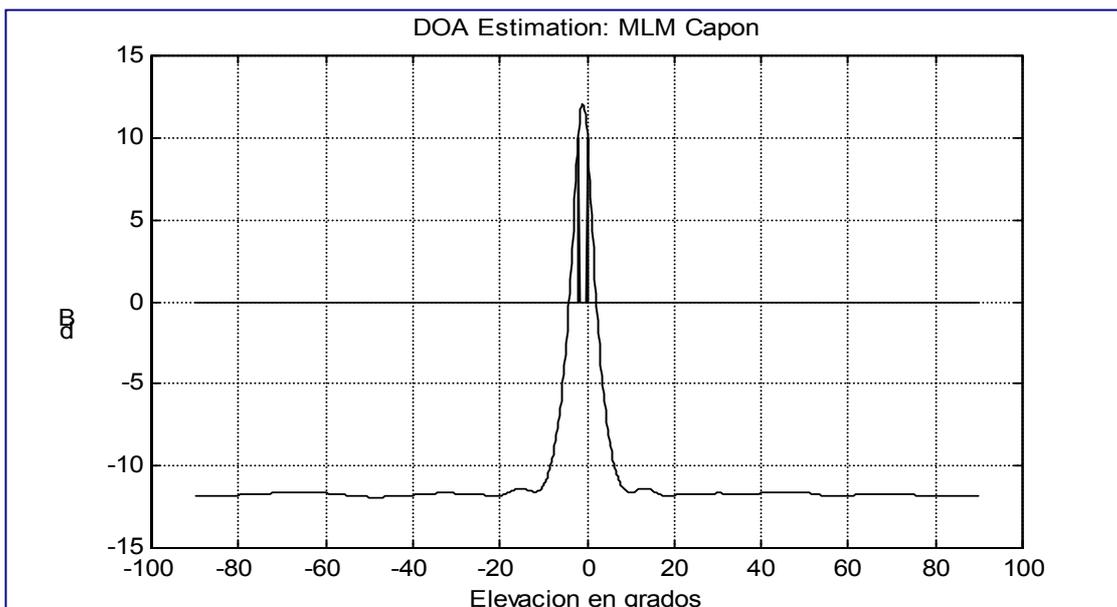


Figura III.10. Estimador de potencia sin resolver dos fuentes.

Evaluando el estimador de densidad, puede verse como resuelve perfectamente las dos fuentes.

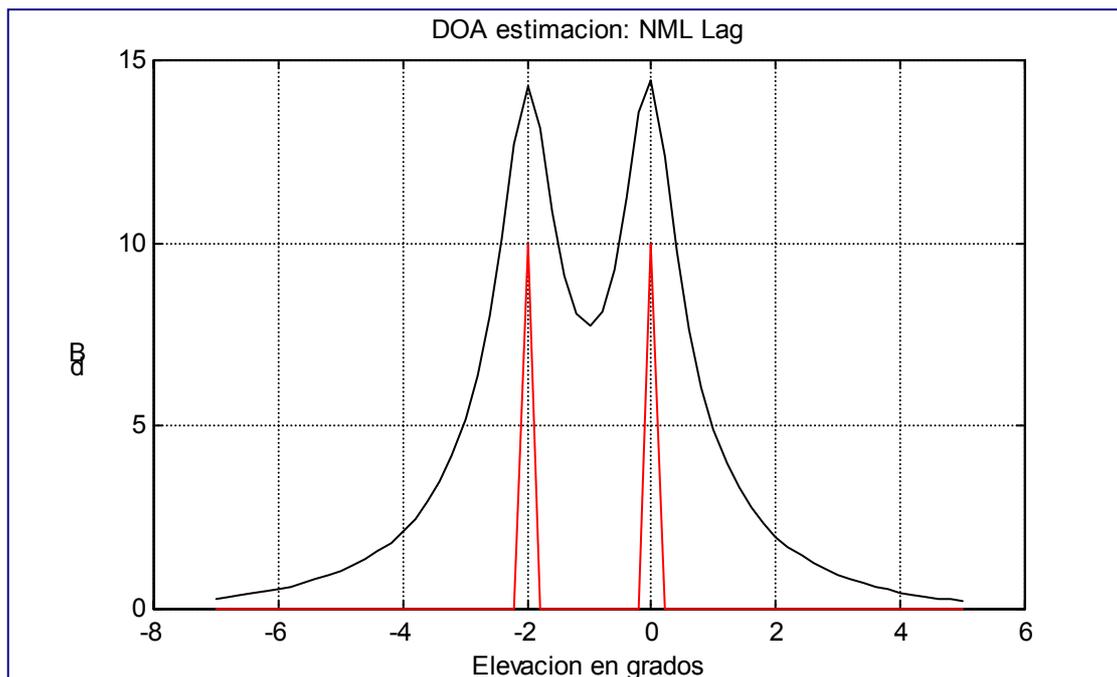


Figura III.11. Estimador de densidad o normalizado.

El estimador de potencia, también se le denomina, mas adecuadamente que MLM, como de mínima varianza. Dicha denominación no es estrictamente correcta. El estimador, propuesto por Capon para aplicaciones en exploración geofísica, planteaba el carácter óptimo cuando el “snapshot” y la matriz de covarianza admitían la descomposición citada antes y que se reproduce a continuación.

$$\begin{aligned}
 \underline{X}_n &= a(n) \cdot \underline{S} + \underline{X}_{o,n} \\
 \underline{\underline{R}} &= \alpha \cdot \underline{S} \cdot \underline{S}^H + \underline{\underline{R}}_o \\
 \alpha &= E(|a(n)|^2) \\
 \underline{\underline{R}}_o &= E(\underline{X}_{o,n} \cdot \underline{X}_{o,n}^H)
 \end{aligned}
 \tag{III.43}$$

Nótese, antes de proseguir, que dicha formulación es solo valida si en la dirección explorada esta una fuente, cosa que no tiene porque ser. Con todo, la incorrección es más fuerte en lo que sigue. Si, además, se considera que el “leakage” es producido por ruido o interferencias con distribución gaussiana, la probabilidad del “snapshot”, condicionada a que existe una fuente en la dirección \underline{S} sería (II.44).

$$\begin{aligned}
 \Pr\left(\frac{\underline{X}_n}{a(n)}, \underline{S}\right) &= \\
 &= \frac{1}{(2\pi \cdot \det(\underline{\underline{R}}_o))^{1/Q}} \cdot \\
 &\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot [\underline{X}_n - a(n) \cdot \underline{S}] \cdot \underline{\underline{R}}_o^{-1} \cdot [\underline{X}_n - a(n) \cdot \underline{S}]\right\}
 \end{aligned}
 \tag{II.44}$$

Por lo que el estimador de máxima verosimilitud de $a(n)$, o de su potencia, coincide con la expresión del estimador de potencia utilizado. Basta derivar y obtener la expresión de $a(n)$ y el de su potencia. Es decir, el estimador de Capon es óptimo o de máxima verosimilitud cuando tan solo existe una fuente, el ruido es gaussiano y se esta precisamente en la dirección de esa única fuente. Note que la

presencia de dos fuentes invalidaría, en general, el asumir que al explorar una el resto está distribuido según una ley gaussiana. Es por lo anterior por lo que no puede considerarse como un estimador ML salvo en las condiciones mencionadas. Por ello al referirse a este estimador se hará como estimador de Capon, sin insistir en su etiqueta, habitual e incorrecta, de Método de máxima Verosimilitud (MLM).

Es interesante comprobar, que en el caso de Phased Array, el estimador obtenido es óptimo para las mismas condiciones pero además en ruido espacial blanco.

Con respecto al comportamiento del estimador de potencia y normalizado, en la Figura III.12 se muestra su respuesta. La apertura es planar y ahora las fuentes se encuentran más próximas.

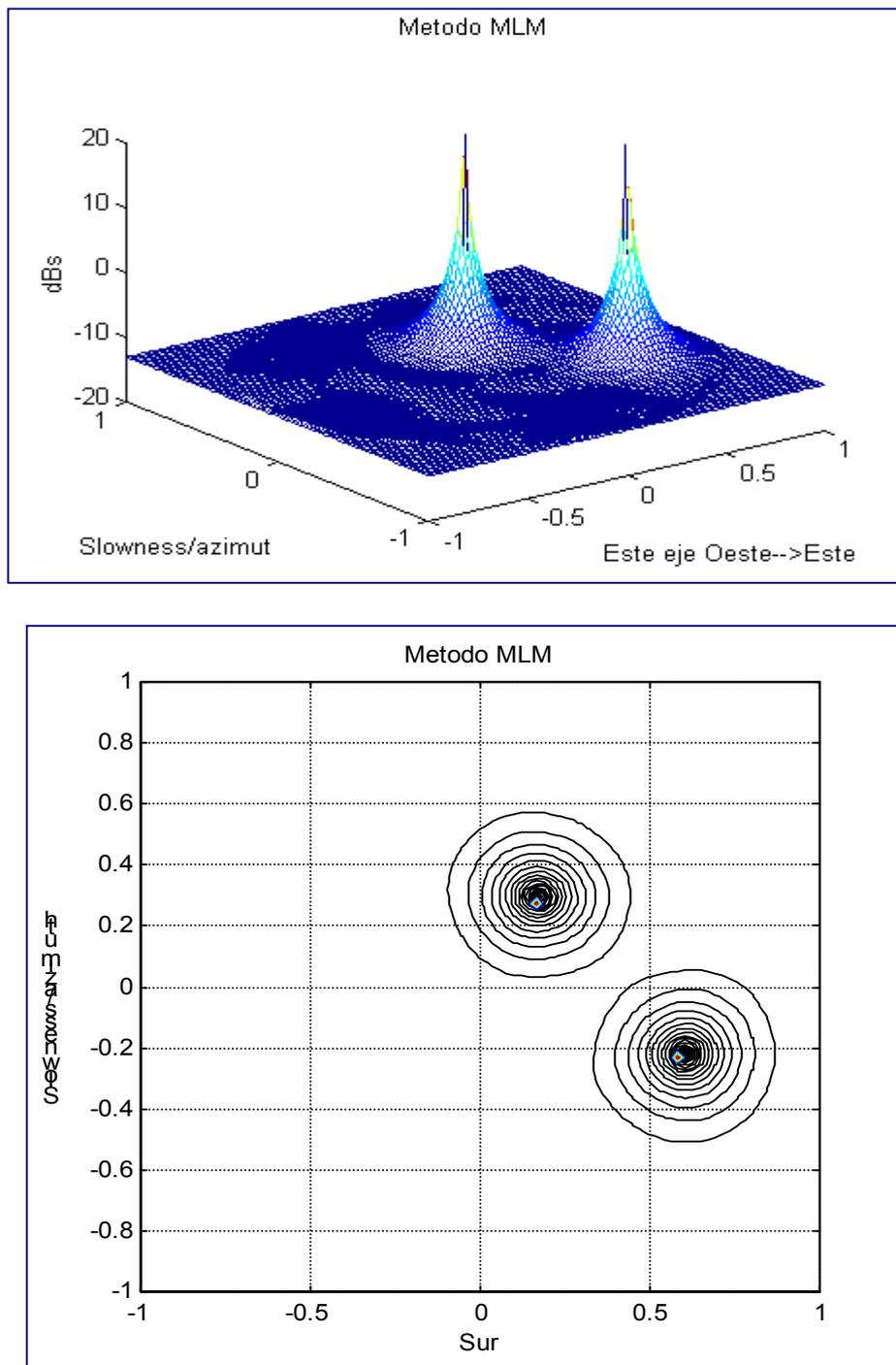


Figura III.12 Estimador de potencia para apertura planar. Las fuentes están situadas en 40 y 20 grados de elevación y 110 y 30 de azimut.

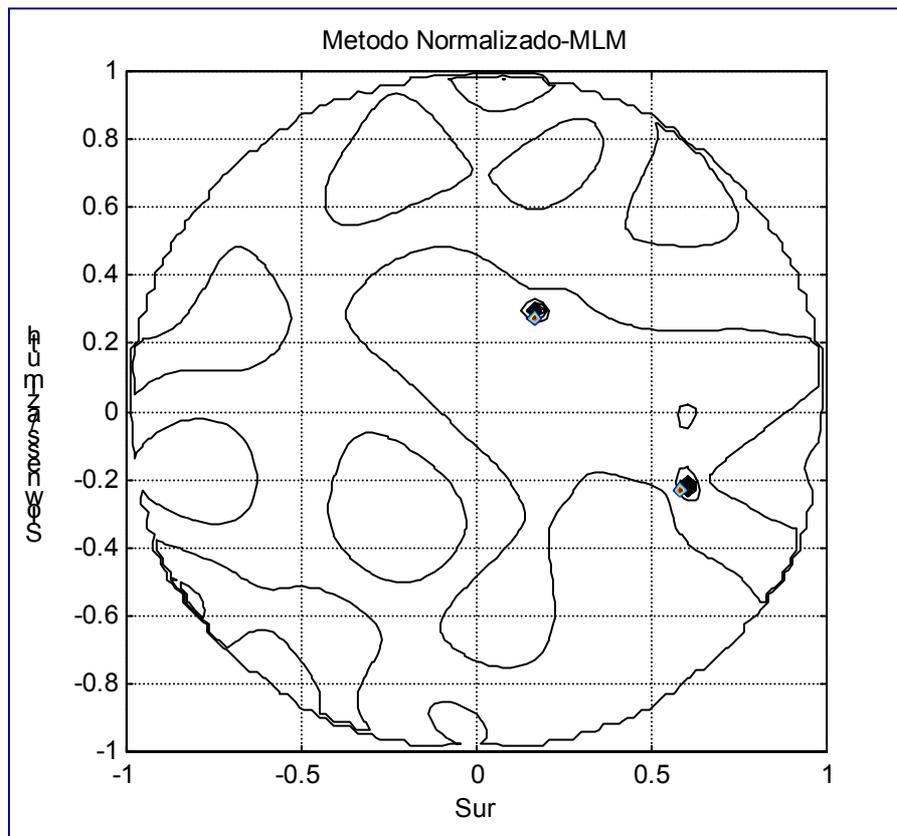
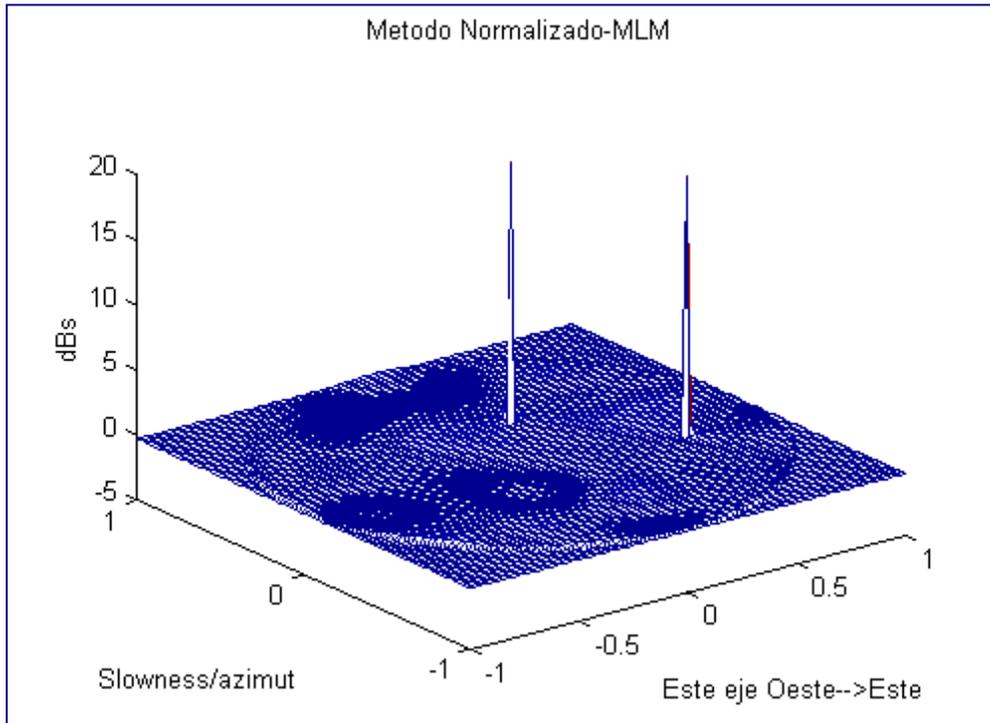


Figura III.13. El estimador normalizado NMLM para el mismo escenario que la figura anterior.

Ha de insistirse que, a pesar de que el estimador de potencia, ni el normalizado, obedecen al estimador de DOA de máxima verosimilitud, el estimador y su versión normalizada descritos en este apartado presentan uno de los mejores compromisos en calidad versus complejidad. Al mismo tiempo, presentan una robustez que no es habitual a los procedimientos que siguen.

Con el fin de profundizar en el estimador, se analizara a continuación el caso de una sola fuente en ruido blanco no direccional. Como ya se ha anticipado, el conformador óptimo en este caso es el phased array. La inversa de la matriz de covarianza para una sola fuente es (III.44).

$$\underline{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\underline{I} - \frac{P_d \cdot \underline{S}_d \cdot \underline{S}_d^H}{\sigma^2 + Q \cdot P_d} \right) \quad (\text{III.44})$$

Obteniendo el conformador optimo para la dirección de la deseada, el nivel de potencia estimado y la densidad vendrían dados por (III.45).

$$\begin{aligned} P(\underline{S}_d) &= P_d + \frac{\sigma^2}{Q} \\ \Phi(\underline{S}_d) &= Q \cdot P_d + \sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Es decir, el nivel de potencia estimado tiene un “leakage” que es la potencia del ruido no direccional dividido por el número de elementos. Por otro lado, es obvio que la densidad, como corresponde a una fuente puntual, tiende a infinito cuando el número de elementos de la apertura tiende a infinito.

Con respecto a como se comporta el estimador en una dirección que no corresponde a la deseada, es fácil comprobar que el conformador optimo esta formado por un “phased array” en la dirección bajo exploración menos un termino que depende del vector de enfoque de la única fuente presente en el escenario.

$$\underline{A}(\underline{S}) = \frac{1}{\sigma^2} \left[\underline{S} - \frac{P_d \cdot f(\underline{S}_d, \underline{S})}{\sigma^2 + Q \cdot P_d} \cdot \underline{S}_d \right] \quad (\text{III.46})$$

Siendo

$$f(\theta, \theta_d) = \underline{S}_d^H \cdot \underline{S} \quad (\text{III.47})$$

En esta expresión se hace evidente que el “phased array” deja de ser el conformador optimo para medir el nivel de potencia en cualquier dirección diferente de la de la única fuente. Lo que ocurre es que cuando se explora una dirección donde no esta la única fuente, el conformador optimo trata de suprimir el leakage de esta, atenuando la dirección \underline{S}_d . El nivel de atenuación, viene dado por:

$$\underline{S}_d^H \cdot \underline{A} = \frac{f(\theta, \theta_d)}{\sigma^2 + Q \cdot P_d} \quad (\text{III.48})$$

Un nivel de atenuación que depende de los ángulos de exploración y de posición de la fuente pero que, en cualquier caso, aumenta cuanto más fuerte es la señal y cuanto mayor es el número de elementos.

El estimador de potencia pasa a ser (III.49), donde puede notarse que al ser $f(\theta, \theta_d)$ siempre menor o igual que, para cualquier par de ángulos, el denominador esta muy próximo a Q . En consecuencia, en las direcciones donde no esta la fuente, el estimador de potencia proporciona el nivel de ruido a la entrada, dividido por el numero de elementos. Pero lo más importante es que el estimador es el

mencionado, casi de manera independiente de la dirección explorada. La consecuencia es una gran planicidad del estimador fuera de las direcciones en las que se encuentran las fuentes.

$$P(\underline{S}) = \sigma^2 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{|f(\theta, \theta_d)|^2}{1 + \left(\frac{QP_d}{\sigma^2} \right)} \right)} \quad (\text{III.49})$$

Este comportamiento de planicidad, que el lector puede encontrar al compara el estimador con otras alternativas, le da una robustez en el sentido de que no produce falsos picos y evita la sobre estimación de motivos o fuentes en el escenario. Esta propiedad de planicidad es la que le sitúa, en la práctica, como uno de los mejores procedimientos de estimación de DOA, sobre todo a su versión normalizada.

III.5 PREDICCIÓN LINEAL.

Dentro de la alternativa a los métodos de conformación, y más a modo ilustrativo que por su utilidad práctica, se describirá en este apartado el procedimiento clásico de anulación. Su interés es pedagógico ya que en cierto modo esta relacionado con los métodos que le seguirán en la presentación.

Como ya se menciona, un método de anulación consiste en el diseño de un conformador que, en lugar de seleccionar las direcciones donde están presentes las fuentes, procede a la anulación de estas. Por esta razón su criterio de diseño es encontrar el conformador que produce mínima potencia a la salida.

$$\underline{A}^H \underline{R} \underline{A} \Big|_{min} \quad (\text{III.50})$$

Diseñado de este modo, los ceros del conformador indicaran las direcciones de las fuentes presentes en el escenario. En otras palabras, la posición de las fuentes se estimara desde la posición de los máximos de la inversa de la respuesta espacial del conformador diseñado.

$$\Phi(\underline{S}) = \frac{1}{|\underline{A}^H \underline{S}|^2} \quad (\text{III.51})$$

A la hora de diseñar el conformador, es claro que ha de imponerse alguna restricción que evite la solución trivial. La restricción mas usada es forzar que una de las componentes del conformador sea igual a la unidad, por ejemplo, que $a(0)$ ha de ser la unidad.

$$\underline{A}^H \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \underline{A}^H \underline{1} = 1 \quad (\text{III.52})$$

Resolviendo el problema de minimización con restricciones, se obtiene la solución para el conformador que se puede ver en (III.53)

$$\underline{A} = \frac{\underline{R}^{-1} \underline{1}}{\underline{1}^H \underline{R}^{-1} \underline{1}} \quad (\text{III.53})$$

El estimador de la densidad de DOA se obtiene como se indica en (III.54), salvo constantes.

La razón de su nombre, predicción lineal, proviene del hecho de que el conformador es el que resultaría de minimizar el error de predicción entre el sensor puesto a uno en el procedimiento y el resto. Es decir, el conformador es un predictor lineal trabajando sobre diversidad espacial.

$$\Phi(\underline{S}) = \frac{1}{\left| \underline{1}^H \underline{R}^{-1} \underline{S} \right|^2} \quad (\text{III.54})$$

Una de las características del método expuesto, al igual que cualquier otro método de anulación, es que son estimadores para fuentes puntuales (i.e. su posición se fija con los ceros de conformador) y que siempre proporcionan un estimador de densidad y no calibrado. En otras palabras, el dibujo del estimador no presenta un comportamiento respetuoso con los niveles de las fuentes. En el fondo es la posición de los ceros del denominador de (III.54) el que determina la posición, sin ser explícito en la potencia o densidad de la fuente marcada. Por esta última razón, a los procedimientos de anulación se les denomina, más que estimadores de DOA, como detectores de DOA, es decir de su posición. De hecho, es recomendable que después de utilizar un método de anulación para encontrar la posición, se emplee el procedimiento del apartado anterior para determinar su nivel y densidad de manera precisa.

Nótese que, al tratarse de un procedimiento de predicción, con el uso de aperturas gemelas, igual que se usaban para la restitución de rango en escenarios con fuentes coherentes, el método de predicción resulta robusto a fuentes coherentes, ya que el promediado espacial restituye el rango de la matriz de covarianza.

También es de destacar que el sensor o elemento que se usa de referencia es irrelevante para la calidad del procedimiento. Solo razones prácticas de sensibilidad respecto a errores aconsejan tomar el sensor de referencia como el más fiable y centrado dentro de la geometría de la apertura.

Si los métodos de anulación tienen el problema de no ser calibrados y por tanto de gran varianza en su estimación de densidad, a cambio, no presentan limitación en términos del principio de incertidumbre y, al menos teóricamente, su resolución no tiene límite. Este no es el caso de los conformadores de los dos métodos anteriores que tienen su resolución limitada al inverso del ancho de haz utilizado. En cualquier caso, el lector puede comprobar que el procedimiento de predicción lineal, en el formato aquí descrito y sin las extensiones que mas adelante se llevaran a cabo, no compite con el estimador normalizado del apartado anterior, ni en resolución ni en robustez.

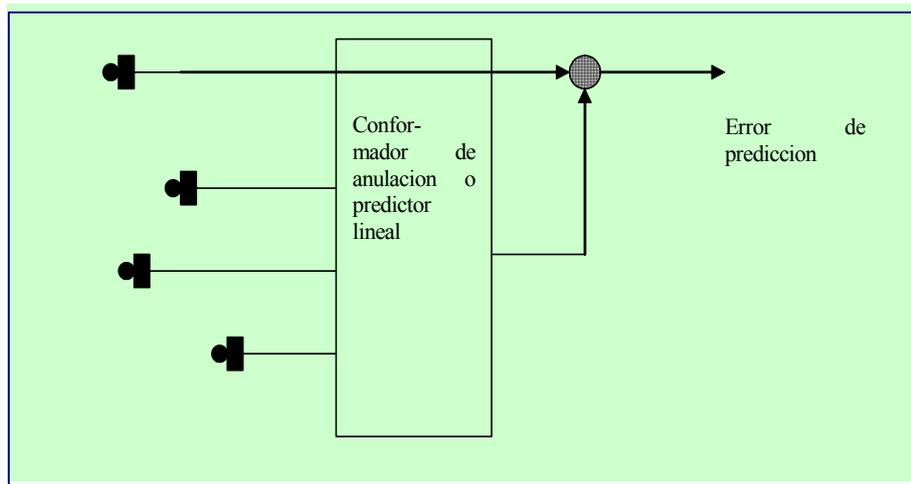


Figura III.14. Conformador de anulación o predictor lineal.

Es de señalar, al lector familiarizado con métodos de estimación espectral en series temporales, que en el caso de diversidad espacial, el estimador de máxima entropía coincidiría con el predictor lineal solo en el caso de arrays ULA. No es que el estimador MEM no exista para aperturas no lineales y uniformes sino que su cálculo es complicado. El diseño de MEM para sensores no equiespaciados, tanto en aperturas lineales como planares puede encontrarse en una de las referencias del autor incluidas al final del capítulo. En cualquier caso, como ya se ha repetido, los procedimientos de anulación que siguen han

convertido en casi obsoleto el usar predicción lineal o los complicados estimadores MEM en problemas de detección de ángulo de llegada

III.6. METODOS SVD (MUSIC)

Dentro de los métodos de anulación, el más popular es el denominado “Multiple Signal Composition” o abreviadamente Music. Este procedimiento esta basado en las propiedades de los autovectores y autovalores de la matriz de covarianza y es, de los presentados hasta ahora en esta sección, el de mayor resolución pero de fiabilidad inferior a NMLM. Recalcando que se trata de un método de anulación y por tanto, no calibrado y valido para fuentes puntuales, explota de manera eficiente la estructura de la matriz de covarianza.

Inicialmente se supondrá que el escenario esta formado por NS fuentes no coherentes en ruido no direccional. Con esta premisa la matriz de covarianza admite la estructura reflejada en (III.55) que refleja la naturaleza de fuentes puntuales en el escenario.

$$\underline{\underline{R}} = \sum_{s=1}^{NS} P_s \cdot \underline{\underline{S}}_s \cdot \underline{\underline{S}}_s^H + \sigma^2 \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{S}}^H + \sigma^2 \cdot \underline{\underline{I}} \quad (III.55)$$

Claramente al primer término se le puede denominar de señal y al segundo de ruido. Lo que es importante es que el espacio de señal tiene dimensión NS, menor que el número de elementos de la apertura Q, y que dicha dimensión viene dada por el rango de la matriz diagonal $\underline{\underline{P}}$ o de potencia de las fuentes. El espacio de señal, esta expandido por los vectores no ortonormales que forman, sus columnas, la matriz de direcciones $\underline{\underline{S}}$.

Si ahora se procede a examinar la estructura de la misma matriz, definida positiva, en términos de sus autovectores $\underline{\underline{e}}_q$ y de sus autovalores λ_q , se puede poner que:

$$\underline{\underline{R}} = \sum_{q=1}^Q \lambda_q \cdot \underline{\underline{e}}_q \cdot \underline{\underline{e}}_q^H = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{E}}^H$$

siendo

$$\underline{\underline{E}} = \left[\underline{\underline{e}}_1 \quad \cdot \quad \underline{\underline{e}}_{NS} \quad \underline{\underline{e}}_{NS+1} \quad \cdot \quad \underline{\underline{e}}_Q \right] \quad (III.56)$$

y verificando que

$$\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{e}}_q = \lambda_q \cdot \underline{\underline{e}}_q$$

El razonamiento que sigue es sencillo y fuerte en sus consecuencias. Si el espacio de señal tiene una dimensión NS, quiere decir que Q-NS autovectores no contribuyen a dicho espacio. Si se denomina a los autovectores que describen el espacio engendrado por las direcciones contenidas en $\underline{\underline{S}}$ como autovectores de señal, es claro que el resto de autovectores serán ortogonales a todos ellos y por lo tanto a todas las fuentes presentes en el escenario. En conclusión, los nulos de los denominados Q-NS autovectores de ruido han de estar donde se encuentran las fuentes.

De otra manera, si los autovectores de ruido no tiene proyección alguna en el subespacio de señal, entonces se verificara (III.57).

$$\underline{\underline{S}}^H \cdot \underline{\underline{e}}_q = \underline{\underline{0}} \quad \forall q = NS + 1, Q \quad (III.57)$$

Por lo que, es fácil comprobar que, todos sus autovalores son iguales y toman el valor del nivel de ruido.

$$\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{e}}_q = \sigma^2 \cdot \underline{\underline{e}}_q \quad q = NS + 1, Q \quad (III.58)$$

Por las mismas razones, los autovalores de los vectores del subespacio de señal serán siempre superiores al nivel de ruido, recuérdese que todos son positivos al ser la matriz de covarianza definida positiva.

Al resumir todo lo expuesto en un procedimiento de detección de DOA, nótese que del cálculo de los autovectores de la matriz se obtendrá el número de fuentes NS presentes en el escenario; o bien, el número de elementos de la apertura menos el número de autovalores iguales al mínimo, incluido este, proporcionan el número de fuentes. En segundo lugar, los ceros comunes de todos los autovectores indicarán la presencia de las fuentes, con lo que se formula el estimador como (III.59) o (II.60) en forma matricial.

$$\Phi(\underline{S}) = \frac{1}{\sum_{q=NS+1}^Q \left| \underline{S}^H \cdot \underline{e}_q \right|^2} \quad (\text{III.59})$$

$$\Phi(\underline{S}) = \frac{1}{\left| \underline{S}^H \cdot \underline{E}_{RUIDO} \right|^2} \quad (\text{II.60})$$

Una forma más eficiente, en términos de calidad en la estimación de la posición, es calcular los ceros del polinomio que resulta del producto escalar del vector de dirección y el autovector. De todos modos, este método, denominado “Root-Music”, es complicado, cuando no inviable, para el caso de aperturas no uniformes o planares.

La Figura III.15, presenta la calidad del estimador presentado en esta sección para la misma apertura que en las secciones precedentes con dos fuentes separadas dos grados.

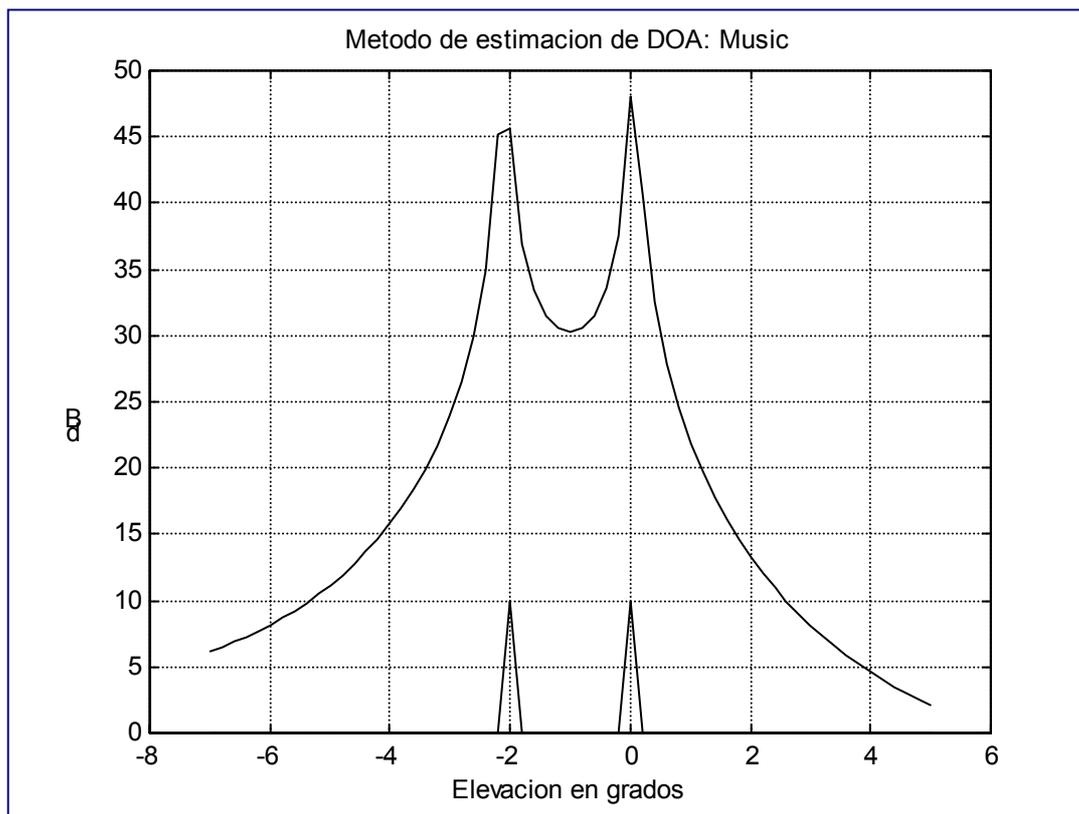


Figura III.15. Estimación Music de DOA para apertura uniforme.

Con respecto a los autovalores en la Figura III.16a puede verse su representación (284 17 1 11). Claramente se distinguen dos autovalores mayores que el resto por lo que la dimensión del espacio de señal es de dos y la del espacio de ruido es 13. En cualquier caso, la estimación del tamaño del espacio de señal es uno de los mayores problemas de Music.

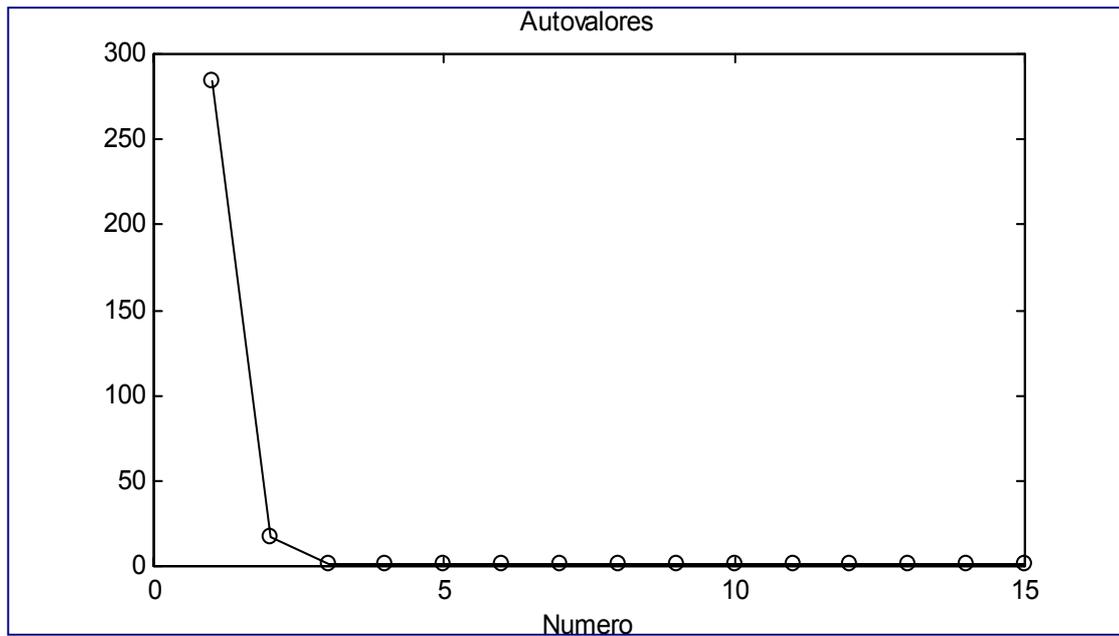
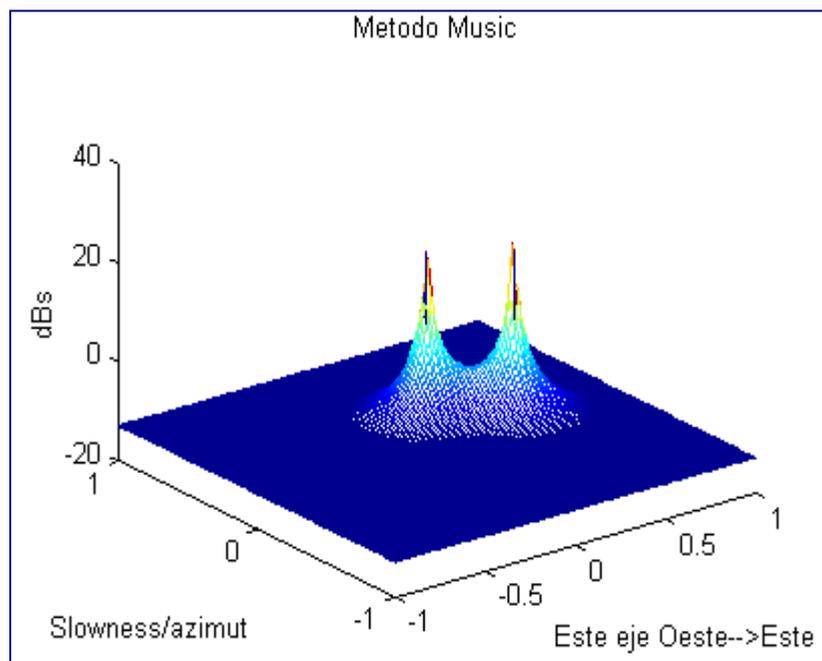


Figura III.16. Autovalores de la matriz de covarianza, estimada con 3000 snapshots, para el estimador de la figura anterior.

El problema en determinar la dimensión del espacio de señal radica que, para el caso de dos fuentes, el primer autovalor crece con la potencia de ambas fuentes pero el segundo decrece con su proximidad. En otras palabras, el detectar que se encuentran dos fuentes en el escenario es más difícil a medida que las dos fuentes se aproximan en su posición. Además, si una de ellas es más débil que la otra la decisión es aun más difícil en lo que se refiere a estimar el número de fuentes. En el mismo ejemplo de la Figura (III.16) si las fuentes están separadas un grado, el primer autovalor pasa a 296 (aumenta) y el segundo pasa a valer 5 (disminuye). Si a este efecto cambios en los autovalores, se le añade problemas leves de calibración, o bajo número de snapshots en la estimación de la matriz de covarianza, Music encuentra su barrera efectiva en términos de resolución en este problema

En lo que se refiere al comportamiento del estimador, para la apertura planar, de secciones anteriores, en la Figura III.17 y III.18 puede verse su comportamiento.



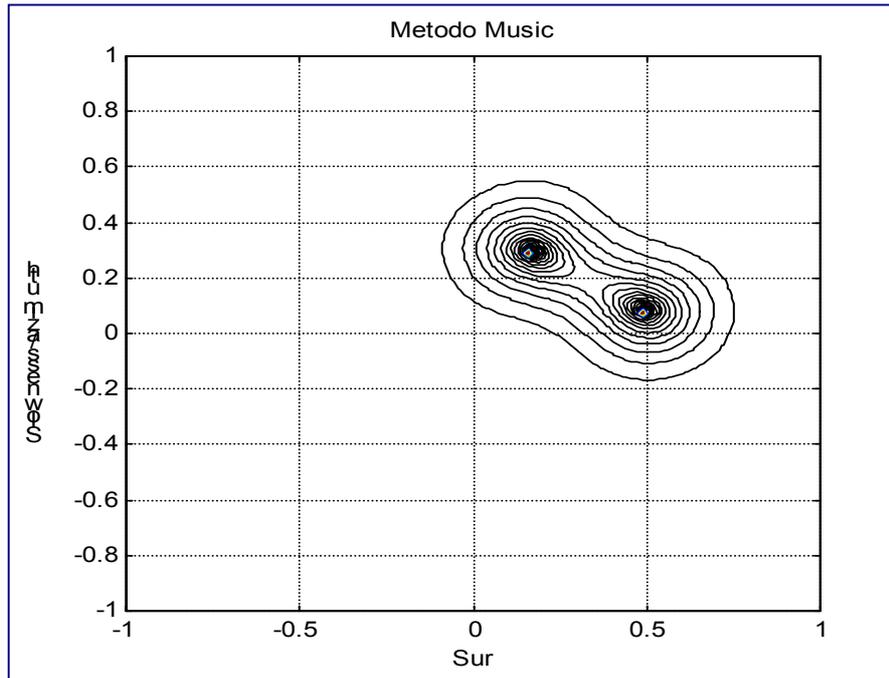


Figura III.17 Music en apertura planar para dos fuentes en 30 y 20° de elevación y 80 y 30° de azimut,

Una de las contribuciones de Music sobre el método de Pisarenko es que este último empleaba tan solo el último autovector. La ventaja es que de este modo nunca se sobrestima la dimensión del espacio de ruido. Por el contrario, todos los autovectores, al ser de Q coeficientes, tienen $Q-1$ raíces o ceros. En otras palabras, el estimador de Pisarenko proporcionaba siempre $Q-1$ posiciones de las que NS de ellas eran de las fuentes. Por esta razón, con el fin de identificar cuáles eran correctas y cuáles no, se utilizaba un conformador que exploraba cada una, con ceros en las otras, para verificar cuáles eran las correctas. La contribución de Music es que evita este segundo paso. La razón es que las únicas raíces en las que coinciden todos los autovectores de ruido, de las $Q-1$ que tiene cada uno, es aquellas que les hacen a todos ortogonales al subespacio de señal, es decir, las que coinciden con la posición de las fuentes en el escenario.

III.6.1. REDUCCION AL SUBESPACIO DE RUIDO.

Una de las mejores contribuciones de Music a todos los métodos es que el carácter ortogonal del subespacio de ruido a las fuentes permite explicar mejor los mecanismos por los que cada método obtiene su resolución correspondiente. De hecho, todos los estimadores vistos hasta el presente pueden revisarse bajo la perspectiva de autovectores y autovalores.

En concreto, es interesante analizar el método MLM o estimador de nivel de potencia bajo la óptica de subespacio de señal y de ruido. Como recordara el lector el estimador mencionado tiene la expresión indicada a continuación.

$$P^{MLM}(\underline{S}) = \frac{1}{\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S}} \quad (III.61)$$

La descomposición en autovectores, permite escribir (III.62) para cualquier exponente entero, positivo o negativo, como (III.62)

$$\underline{R}^m = \sum_{q=1}^Q \lambda_q^m \underline{e}_q \underline{e}_q^H \quad (III.62)$$

Con lo que el estimador MLM se puede escribir como (III.63), en términos de los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza.

$$P^{MLM}(\underline{S}) = \frac{1}{\sum_{q=1}^Q \lambda_q^{-1} \left| \underline{S}^H \underline{e}_q \right|^2} \quad (\text{III.63})$$

Comparando esta expresión con Music se puede concluir que en el caso de que los autovalores de señal fuesen grandes, y su inversa despreciable, MLM sería idéntico a Music, pues todos los autovalores de ruido serían iguales. Es más, es evidente que si MLM tiene menor resolución que Music esto solo puede ser debido a la presencia de los autovectores de señal en el denominador. Si, en consecuencia, se retira la contribución de los autovectores de señal se estará ante un estimador de resolución similar a Music y que además pondera por los autovalores, su inversa, resultantes cada contribución de los autovectores de ruido. Esta ponderación que, en teoría no tendría sentido, se comprende del hecho que, al usarse matrices estimadas no todos los autovalores de ruido se obtienen con un valor idéntico. Errores de estimación o calibración hacen que existan autovalores más grandes que otros y el estimador de (III.64), debido a Jhonson, presenta una mayor robustez que Music para una resolución completamente similar.

$$\Phi^{JH}(\underline{S}) = \frac{1}{\sum_{q=NS+1}^Q \lambda_q^{-1} \left| \underline{S}^H \underline{e}_q \right|^2} \quad (\text{III.64})$$

Del mismo modo puede concluirse la superior resolución del estimador normalizado ya que en su denominador los autovalores de ruido, más pequeños salen reforzados por ir elevados al cuadrado.

$$\Phi^{NMLM}(\underline{S}) = \frac{\sum_{q=1}^Q \lambda_q^{-1} \left| \underline{S}^H \underline{e}_q \right|^2}{\sum_{q=1}^Q \lambda_q^{-2} \left| \underline{S}^H \underline{e}_q \right|^2} \quad (\text{III.65})$$

Es el mismo principio el que sugiere los denominados estimadores potenciales para estimación de DOA, de la misma manera que fueron propuestos para análisis espectral, presentándose algunos de ellos a continuación.

$$\Phi^{POT1}(\underline{S}) = \frac{\underline{S}^H \underline{R}^{-m+1} \underline{S}}{\underline{S}^H \underline{R}^{-m} \underline{S}} = \frac{\sum_{q=1}^Q \lambda_q^{-m+1} \left| \underline{S}^H \underline{e}_q \right|^2}{\sum_{q=1}^Q \lambda_q^{-m} \left| \underline{S}^H \underline{e}_q \right|^2}$$

$$\Phi^{POT2}(\underline{S}) = \frac{1}{\left[\underline{S}^H \underline{R}^{-m} \underline{S} \right]^m} = \frac{1}{\left[\sum_{q=1}^Q \lambda_q^{-m} \left| \underline{S}^H \underline{e}_q \right|^2 \right]^m} \quad (\text{III.66})$$

$$\Phi^{LOG}(\underline{S}) = -Ln \left[\exp \left(\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S} \right) \right] = -Ln \left(\sum_{q=1}^Q \exp(-\lambda_q) \left| \underline{S}^H \underline{e}_q \right|^2 \right)$$

Todos ellos admiten una formulación de mayor resolución si se elimina el espacio de señal bajo el argumento de que este es el limitador de la resolución.

III.6.2. RUIDO COLOREADO.

El caso de que el ruido espacial no sea blanco entraña para Esprit un problema. La razón es que la determinación correcta del subespacio de señal pasa por el conocer correctamente la matriz espectral de ruido.

Si se supone el caso de ruido coloreado, la matriz de covarianza del escenario pasa a ser:

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{S}}^H + \underline{\underline{R}}_o \quad (\text{III.67})$$

A partir de esta expresión, encontrar el subconjunto de vectores ortonormales a la matriz de DOAs $\underline{\underline{S}}$ pasa por resolver el problema de autovalores generalizado de (III.68)

$$\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{e}}_q = \lambda_q \cdot \underline{\underline{R}}_o \cdot \underline{\underline{e}}_q \quad (\text{III.68})$$

Todos los autovectores ortogonales al espacio de señal presentan un valor unidad al resolver el problema anterior. De lo que se concluye que el conocimiento de la matriz de covarianza del ruido espacial $\underline{\underline{R}}_o$ es necesario para obtener el subespacio de ruido, y con ellos la posición de las fuentes.

Es por esta razón por la que los métodos svd, entre ellos Music, son de poca utilidad en escenarios como sonar donde habitualmente el ruido espacial no presenta una distribución uniforme. Métodos como MLM o NMLM presentan una mayor robustez y calidad de la que los métodos svd pueden proporcionar sin un conocimiento preciso de la mencionada matriz.

III.7 PREDICCIÓN ESPACIAL: ESPRIT

Como habrá podido observar el lector, no se ha mencionado un método equivalente a predicción lineal en series temporales para la estimación de DOA. La razón es que el carácter puntual de las fuentes hace que dichos procedimientos no compitan en calidad con NMLM o Music. No obstante el concepto de un conformador que anula todas las fuentes presentes en el escenario con la restricción de una cadena transparente es válido. La formulación de un conformador en su papel de predictor sería la que se expone en (III.69).

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}^H \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{A}} \Big|_{MIN} \\ \underline{\underline{A}}^H \cdot \underline{\underline{1}} = 1 \end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

Donde el vector $\underline{\underline{1}}$ obedece a (III.70)

$$\underline{\underline{1}}^T = [1, 0, \dots, 0] \quad (\text{III.70})$$

Se establece ahora que el sensor etiquetado como el uno tiene un peso fijo e igual a la unidad. De este modo se evitara la solución trivial para un vector de anulación.

La solución para el conformador predictor y la forma en que se produce el estimador de DOA aparece en (III.71).

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} = \frac{\underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{\underline{1}}}{\underline{\underline{1}}^H \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{\underline{1}}} \\ \Phi(\underline{\underline{S}}) = \frac{1}{|\underline{\underline{A}}^H \cdot \underline{\underline{S}}|^2} \propto \frac{1}{|\underline{\underline{1}}^H \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}}|^2} \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

Análogamente, sobre este estimador se puede practicar su reducción al subespacio de ruido para obtener un estimador similar a Music. No obstante su resolución es francamente inferior.

Dicho lo anterior, parece que el concepto de predicción no tendría mayor resonancia en la estimación de DOA. Sin embargo, un problema computacional despertó de nuevo su atractivo como procedimiento de estimación o detección de DOA.

Un aspecto a destacar de todos los estimadores presentados es que consumen un gran número de operaciones en el denominado “scanning” o exploración. Todos los estimadores de DOA, expuestos hasta el momento, son funciones de un vector de steering \underline{S} y por tanto para cada ángulo se ha de ejecutar una forma cuadrática que permite visualizar el estimador para cada elevación, por ejemplo, y en los máximos indica la presencia de fuentes. Pensando en una exploración del estimador con una resolución de 0.1 grados, tan solo en elevación, la estimación de DOA requeriría calcular 1800 formas cuadráticas para representar el estimador. Y lo peor es que absolutamente todos requieren de explorar todo el espacio. Imagínese en el caso de azimut y elevación simultáneamente, para localizar, digamos dos fuentes.

Es evidente que encontrar un procedimiento que sin exploración arrojarase directamente que las fuentes están en θ_1 y θ_2 sería de un gran interés. Es decir, un método que proporcionase la estimación de ángulos sin necesidad de realizar la exploración vía el vector \underline{S} .

La solución al problema de encontrar un método sin exploración viene dada, por un lado de complicar la apertura, y por otro, de usar el concepto de predicción espacial, de una manera idéntica a como fue utilizado en el denominado “spatial smoothing” para la restitución de rango de la matriz correspondiente a un escenario que contiene fuentes coherentes.

De nuevo, se recurrirá al concepto de aperturas gemelas. En la Figura III.28 puede verse la disposición de dos aperturas gemelas. Dicho de otro modo cada elemento del array esta formado por un subarray que, por sencillez, se toma tan solo de dos elementos. De cada una de las aperturas, denominadas x e y en la figura, se dispone de sus “snapshots” correspondientes.

$$\begin{aligned} \underline{X}_n &= \underline{S} \cdot \underline{a}_n + \underline{w}_{x,n} \\ \underline{Y}_n &= \underline{S} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{a}_n + \underline{w}_{y,n} \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

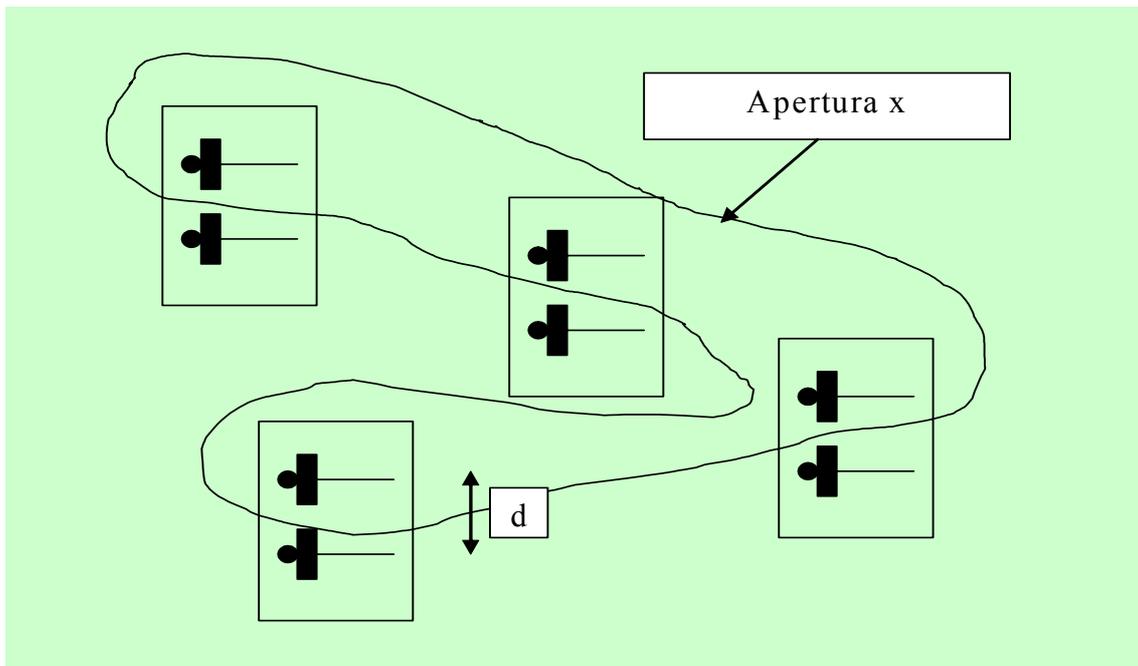


Figura III.28. Dos aperturas gemelas formada por un array en el que cada elemento es a su vez una apertura de dos elementos.

Siendo \underline{S} la matriz de DOAs de las fuentes presentes en el escenario, $\underline{\Phi}$ la matriz diagonal que incluye en sus diagonales el vector desplazamiento para pasar de un “steering” en la apertura $\{x\}$ a la apertura $\{y\}$, el vector \underline{a}_n que contiene la contribución temporal de las fuentes y, finalmente los vectores de ruido, incorrelados, correspondientes a cada una de las subaperturas.

El “snapshot” compuesto vendrá dado por (III.73), donde puede verse que, la contribución de señal o de fuentes es perfectamente predecible de una apertura a la otra si no existiese ruido. La relación entre ambas aperturas entraña pues el diseño de una matriz de predicción.

$$\underline{Z}_n = \begin{bmatrix} \underline{X}_n \\ \underline{Y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S} \\ \underline{S} \cdot \underline{\Phi} \end{bmatrix} \cdot \underline{a}_n + \begin{bmatrix} \underline{w}_{x,n} \\ \underline{w}_{y,n} \end{bmatrix} \quad (\text{III.73})$$

La matriz $\underline{\Phi}$ es, como se ha mencionado es diagonal, y en sus diagonales contiene la información de los DOAs de las fuentes.

$$\underline{\Phi} = \text{Diag} \left[\dots, \exp(j \cdot \frac{2\pi f}{c} \cdot \vec{d} \otimes (\sin(\theta_s) \cos(\varphi_s), \sin(\theta_s) \sin(\varphi_s))) \right] \quad (\text{III.74})$$

Es decir, el conocimiento de esta matriz entraña el conocimiento directo de los ángulos de dirección por lo que todo el proceso se dedicara a su estimación.

Un planteamiento estricto sería el estimar dicha matriz como la matriz de predicción de los snapshots de la apertura $\{x\}$ a la apertura $\{y\}$. No obstante lo que sigue es un procedimiento mas refinado para la obtención de dicha estimación. El predictor sería ahora matricial como se indica en (III.75).

$$\underline{T} \cdot \underline{Z}_n = \begin{bmatrix} \underline{P} & -\underline{I} \end{bmatrix} \underline{Z}_n = \underline{E}_n \quad (\text{III.75})$$

Siendo \underline{E}_n el vector error de predicción cuya norma se ha de minimizar. Nótese que, en el caso sin ruido el problema se formularía como en (III.76).

$$\underline{T} \cdot \begin{bmatrix} \underline{S} \\ \underline{S} \cdot \underline{\Phi} \end{bmatrix} = \underline{\varepsilon} \quad (\text{III.76})$$

La presencia de ruido introduce problemas adicionales a la resolución en \underline{T} de (III.75), por lo que se recurre a la descomposición en valores singulares. La matriz de covarianza del snapshot completo responde a (III.77).

$$\underline{R}_z = \underline{E}_s \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{E}_s^H + \sigma^2 \cdot \underline{E}_N \cdot \underline{E}_N^H \quad (\text{III.77})$$

En esta representación, es claro que el subespacio de señal del “snapshot” completo, y los DOAs de este, describe el mismo subespacio y por tanto es posible encontrar una matriz \underline{G} que relacione ambos, tal y como se indica en (III.78).

$$\begin{bmatrix} \underline{S} \\ \underline{S} \cdot \underline{\Phi} \end{bmatrix} \cdot \underline{G} = \underline{E}_s = \begin{bmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \end{bmatrix} \quad (\text{III.78})$$

Es decir, el subespacio de señal es el mismo tanto en su versión reducida a los ejes principales o autovectores de la matriz de covarianza, como en su versión original extraída del modelo de “snapshot”.

Antes de proseguir, note que la matriz \underline{G} ha de ser NSxNS, siendo NS el número de fuentes o rango de la matriz de autovectores. Así pues, el problema se traslada a encontrar un predictor pero en el subespacio de señal tan solo, con esto se evita cualquier influencia del ruido en la solución, al menos teóricamente si se dispone de la matriz de autovectores de señal.

Con las nuevas matrices, ya libres de ruido se puede plantear el diseño de un predictor de una a otra como la solución para la matriz \underline{E} en (III.79).

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_x & \underline{E}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_x \\ \underline{F}_y \end{bmatrix} = \underline{0} \tag{III.79}$$

O bien como (III.80).

$$\underline{E}_x \cdot (-\underline{F}_x \cdot \underline{F}_y^{-1}) = \underline{E}_y \quad ; \quad \underline{E}_x \cdot \underline{\Psi} = \underline{E}_y \tag{III.80}$$

Llevando esta ultima ecuación a (III.78) se obtiene (III.81) que revela que los autovalores de la matriz $\underline{\Psi}$ coinciden con los elementos de la diagonal de $\underline{\Phi}$ y permite la obtención de los ángulos de llegada.

$$\underline{S} \cdot (\underline{G} \cdot \underline{\Psi} \cdot \underline{G}^{-1}) = \underline{S} \cdot \underline{\Phi} \tag{III.81}$$

En resumen, se trata de, dados los autovectores \underline{E}_x y \underline{E}_y , encontrar la matriz $\underline{\Psi}$, o lo que es equivalente la matriz \underline{E} , que minimiza el error de predicción entre una y otra. Una vez obtenida dicha matriz, sus autovalores coinciden con los de la diagonal de la matriz de desplazamientos que proporciona la posición de las fuentes presentes en el escenario.

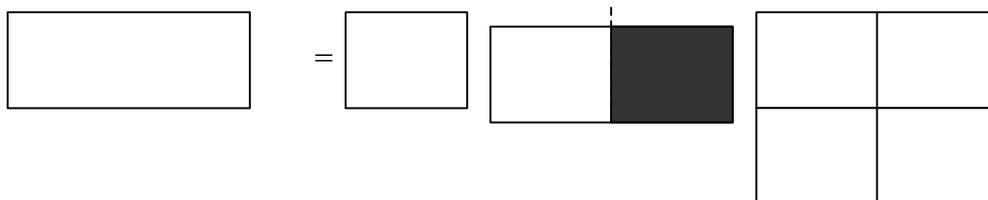
Así pues ha de encontrarse la matriz de predicción exacta que se formula en (III.82).

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_x & \underline{E}_y \end{bmatrix} \cdot \underline{F} = \underline{0} \tag{III.82}$$

El objetivo es encontrar la matriz de predicción exacta en términos de la norma de Frobenius y la restricción asegura la ortonormalidad de los componentes de la matriz buscada.

Para encontrar la solución, ha de descomponerse la matriz de autovectores en valores singulares, como se indica en (III.83) junto a un dibujo de sus dimensiones. Note que \underline{U} es $NS \times NS$, los autovalores están en la primera diagonal de una matriz de $NS \times 2 \cdot NS$ y, finalmente \underline{V} es una matriz de $2NS \times 2NS$.

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_x & \underline{E}_y \end{bmatrix} = \underline{U} \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{V}^H \tag{III.83}$$



Note que la mitad de la matriz de autovalores (en negro) contiene solo ceros. La solución para la matriz \underline{E} consiste en la segunda partición de la matriz \underline{V} , es decir, si

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{11} & \underline{V}_{12} \\ \underline{V}_{21} & \underline{V}_{22} \end{bmatrix} \tag{III.84}$$

La solución que se desea es (III.85).

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{=12} \\ \underline{V}_{=22} \end{bmatrix} \quad (\text{III.85})$$

Por ultimo, la matriz $\underline{\underline{\Psi}}$ viene dada por:

$$\underline{\underline{\Psi}} = -\underline{V}_{=12} \cdot \underline{V}_{=22}^{-1} \quad (\text{III.86})$$

En resumen, los pasos a seguir para la obtención de los DOAs son los siguientes:

- 1) Estimar la matriz de covarianza de los snapshots completos \underline{Z}_n .
- 2) Encontrar la descomposición svd de la matriz de covarianza \underline{E}_s .
- 3) Descomponer en valores singulares \underline{E}_s^T , y utilizar los autovalores por la izquierda o matriz \underline{V} .
- 4) De la partición \underline{V}_{12} y \underline{V}_{22} encontrar la matriz $\underline{\underline{\Psi}}$.
- 5) Calcular los autovalores de esta ultima matriz para identificar los DOAs.

De este modo se configura el método denominado Esprit, debido a Roy y Kailath, que, aunque aparentemente complejo, al evitar el “scanning” para todos los ángulos posibles y con resolución de Music, permite obtener directamente la posición de las fuentes vías sus ángulos directores. Debe recordarse que básicamente el procedimiento es un método de predicción y lo expuesto previamente no es más que una manera eficiente y, teóricamente, independiente del nivel de ruido, de resolver el problema de predicción planteado en (III.75). De hecho, J. Munier, desarrollo un método, denominado “Propagateur” que básicamente ataca directamente el problema de predicción, sin recurrir directamente a la descomposición svd. Es decir, cualquier alternativa valida para resolver el problema de predicción planteado puede considerársele como un método Esprit. El método expuesto es el de mayor calidad para resolver dicho problema, con una carga añadida de complejidad, pero siempre evitando el problema del tedioso “scanning”, necesario en el resto de los procedimientos expuestos hasta el presente apartado. En relación con la solución al problema planteado en (III.82), se recomienda el consultar la obra de Golub y Van Loan “Matrix Computation” donde se encuentra una descripción formal del interés del problema y su solución tal y como se ha expuesto en este apartado. En general, el libro mencionado es un buen curso de álgebra con soluciones practicas que contiene con gran detalle todo el formalismo matemático empleado en estas notas.

III.8 ESTIMACION DE DOA DE MAXIMA VEROSIMILITUD.

Al exponer el método de Capon, en una sección precedente, se menciono que este método fue denominado, erróneamente por su autor como de máxima verosimilitud, y aun hoy conserva las siglas inapropiadas de MLM. La razón del error radica en que la expresión utilizada por Capon para la verosimilitud de los snapshots bajo la hipótesis de una fuente, es tan solo correcta para ese caso de una sola fuente.

En el caso de hallarse NS fuentes en el escenario, el snapshot tiene el siguiente modelo:

$$\underline{X}_n = \underline{S} \cdot \underline{a}_n + \underline{w}_n \quad (\text{III.87})$$

Con este modelo la verosimilitud de N snapshots, condicionada a una matriz de DOAs igual a \underline{S} , una secuencia de vectores de fuente \underline{a}_n ($n=0, N-1$) y una matriz de covarianza del ruido igual a \underline{Q} viene dada por (III.88).

$$\begin{aligned} \Pr(\underline{X} / \underline{S}, \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{N-1}, \underline{Q}) &= \\ &= \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\pi \cdot \det(\underline{Q})} \cdot \exp \left\{ - \left(\underline{X}_n - \underline{S} \cdot \underline{a}_n \right)^H \cdot \underline{Q}^{-1} \cdot \left(\underline{X}_n - \underline{S} \cdot \underline{a}_n \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

Donde se ha considerado que los “snapshots” son independientes y la matriz \underline{X} contiene, por columnas, los N “snapshots” disponibles. El lector puede contemplar la gran diferencia entre la función anterior para el caso de NS fuentes o para el caso de una sola fuente, tal y como la formulo Capon. La

expresión anterior puede simplificarse obteniendo en primer lugar la estimación de los valores de la forma de onda de las fuentes, es decir, la estimación de cada uno de los vectores \underline{a}_n . Derivando e igualando a cero, se obtiene que:

$$\hat{\underline{a}}_n = \left(\underline{S}^H \cdot \underline{Q}^{-1} \cdot \underline{S} \right)^{-1} \cdot \underline{S}^H \cdot \underline{Q}^{-1} \cdot \underline{X}_n \quad (\text{III.88})$$

Al sustituir esta estimación ML en la expresión original de la verosimilitud, resulta (III.89).

$$\Pr(\underline{X} / \underline{S}, \underline{Q}) = \frac{1}{(\pi \cdot \det(\underline{Q}))^N} \cdot \exp \left\{ - \sum_{n=0}^{N-1} \underline{X}_n^H \cdot \underline{P}_{\oplus} \cdot \underline{Q}^{-1} \cdot \underline{P}_{\oplus} \cdot \underline{X}_n \right\} \quad (\text{III.89})$$

Siendo el operador P un operador hermitico que viene dado por:

$$\underline{P}_{\oplus} = \underline{I} - \underline{S} \cdot \left(\underline{S}^H \cdot \underline{Q}^{-1} \cdot \underline{S} \right)^{-1} \cdot \underline{S}^H \cdot \underline{Q}^{-1} \quad (\text{III.90})$$

Este operador es ortogonal al espacio de señal, ya que al multiplicarlo por la matriz de DOAs la proyección es cero. En resumen, el estimador de máxima verosimilitud de la matriz de ruido y de DOAs es aquel que al ser utilizado, vía (III.90), en la verosimilitud (III.89) minimiza esta.

Como puede ver el lector, resolver el problema anterior en las dos matrices es bastante complicado. Una solución iterativa, así como una aproximación muy interesante se presentaran en los apartados que siguen. En cualquier caso, el abordar directamente la minimización anterior es prácticamente inviable.

Una solución, relativamente sencilla, puede obtenerse de considerar el ruido espacial blanco, cosa bastante habitual en tratamiento de arrays en banda estrecha. En este caso, la matriz de ruido es diagonal y su estimación se reduce a calcular únicamente la potencia del ruido σ^2 . En este caso la verosimilitud anterior, mas bien su logaritmo es al que se le denomina verosimilitud se reduce a:

$$L(\underline{S}, \sigma) = kte. - N \cdot Q \cdot \ln(\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{P}_{\oplus} \cdot \underline{X}_n \right|^2 \quad (\text{III.91})$$

Siendo ahora el operador de proyección igual a (III.92).

$$\underline{P}_{\oplus} = \underline{I} - \underline{S} \cdot \left(\underline{S}^H \cdot \underline{S} \right)^{-1} \cdot \underline{S}^H \quad (\text{III.92})$$

Claramente, el problema de estimación del nivel de ruido resulta sencillo y se expresa la solución a continuación como resultado de derivar la verosimilitud e igualar a cero.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N \cdot Q} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{P}_{\oplus} \cdot \underline{X}_n \right|^2 \quad (\text{III.93})$$

De este modo, se llega por fin a la formulación del óptimo estimador de la posición de las fuentes. Al sustituir la expresión del nivel de ruido en la verosimilitud se obtiene que la solución es la matriz \underline{S} que, utilizada en el operador de proyección, minimiza (III.94), en cualquiera de las dos formulaciones, tanto en función de los N “snapshots” como de la matriz de covarianza obtenida de estos.

$$\begin{aligned} L(\underline{S}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{P}_{\oplus} \cdot \underline{X}_n \right|^2 \\ L(\underline{S}) &= \text{Traza} \left[\underline{P}_{\oplus} \cdot \hat{\underline{R}} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.94})$$

En cualquier caso, el encontrar el mínimo de la función anterior no es sencillo. Nótese que si existen dos fuentes, la búsqueda se ha de realizar simultáneamente sobre dos ángulos y sobre una función que no es precisamente muy abrupta alrededor de sus máximos, como puede verse en la Figura III.29.

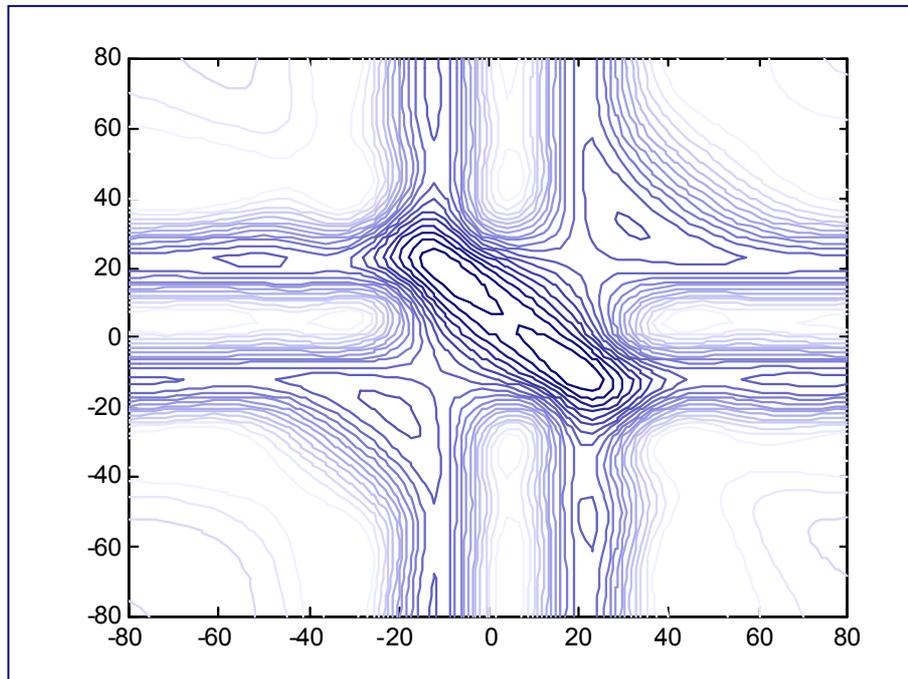


Figura III.29. Función de verosimilitud para dos fuentes en elevaciones de 20 y -10 grados respectivamente. Nótese que la grafica tiene simétrica debido a que tanto 20,-10 como $-10,20$ son puntos de solución y por tanto de máximo.

En definitiva, la búsqueda directa de los valores extremos de la verosimilitud no es la técnica mas empleada y algoritmo prácticos usan de métodos de gradiente o sistemas de búsqueda aleatoria guiada para encontrar más rápidamente los máximos. Con todo, tratándose de un método de estimación óptimo e insuperable por todos los demás, su complejidad le aleja de la mayor parte de las aplicaciones prácticas. El interés de exponerlo es mas como cota superior de calidad a perseguir y tratar de generar procedimientos que aunque aproximados traten de emular su calidad.

Antes de abandonar el apartado, es de destacar como puede entenderse la forma en que Music trabaja. Mientras que ML determina que ha de buscarse simultáneamente para todas las posibles fuentes en el escenario, vía el operador de proyección, Music realiza esta exploración fuente a fuente o de una en una. En otras palabras, Music, formaría el operador de proyección con una sola fuente y al encontrar un mínimo anotaría la detección y continuaría la búsqueda. Se ha de insistir que el carácter óptimo radica en la búsqueda multidimensional vía el operador de proyección.

III.9 EL ALGORITMO EM

Como ha podido verse en el apartado anterior, el procedimiento óptimo o ML resulta mucho más complicado que el procedimiento de Capon. Dicha complejidad radica en que esta crece desmesuradamente dependiendo de si se trata de una sola fuente o de NS fuentes. La verosimilitud de NS obliga a una exploración o “scanning” NS-dimensional que hace impracticable el procedimiento.

La tentativa más elegante para hacer viable la estimación de NS fuentes, sin abandonar el principio de máxima verosimilitud, lo constituye el denominado algoritmo EM. Dicho algoritmo esta formado por dos pasos que le dan el nombre y que se denominan “Estimate and Maximice”. Básicamente, es un procedimiento iterativo que reduce el problema de NS fuentes a NS problemas de una sola fuente. Lo que sigue es una descripción del algoritmo EM aplicado al caso de detección de DOA. Su versión general mas completa y valida para resolver cualquier problema ML N-dimensional resultaría excesiva para la utilización que el problema de estimación de DOA requiere.

El algoritmo distingue entre los denominados datos completos y datos incompletos. De este modo, considera que los datos observados, en nuestro caso el “snapshot” \underline{X}_n , es una función $H(\cdot)$ de los datos completos. Los datos completos son en nuestro caso cada una de las NS contribuciones de las fuentes a los datos incompletos. Si se denomina $\underline{Y}_{s,n}$ al “snapshot” debido a la fuente s en el instante n , se tendrá la primera ecuación que formula los datos completos en función de los incompletos.

$$\underline{X}_n = \underline{H}(\underline{Y}_{1,n}, \dots, \underline{Y}_{NS,n}) \quad (\text{III.95})$$

Dado que el modelo de contribuciones de las fuentes es aditivo, en el caso de DOA, la función $H(\cdot)$, en general no invertible, vendrá dada por:

$$\underline{H}(\cdot) = \begin{bmatrix} \underline{I} & \dots & \underline{I} \end{bmatrix} ; \quad \underline{X}_n = \begin{bmatrix} \underline{I} & \dots & \underline{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{Y}_{1,n} \\ \cdot \\ \underline{Y}_{NS,n} \end{bmatrix} \quad (\text{III.96})$$

Respecto a la formulación de la verosimilitud y denominando $\underline{\theta}$ al vector que contiene los DOAs de las NS fuentes, existe la siguiente relación entre las probabilidades de los datos completos e incompletos:

$$P_{x/y}(\underline{X}_n / \underline{Y}_n, \underline{\theta}) P_y(\underline{Y}_n / \underline{\theta}) = P_{y/x}(\underline{Y}_n / \underline{X}_n, \underline{\theta}) P_x(\underline{X}_n / \underline{\theta})$$

O bien, a nivel de verosimilitud,

$$\begin{aligned} & \text{Ln} \left[P_y(\underline{Y}_n / \underline{\theta}) \right] + \text{Ln} \left[P_{y/x}(\underline{X}_n / \underline{Y}_n, \underline{\theta}) \right] = \\ & \text{Ln} \left[P_{y/x}(\underline{Y}_n / \underline{X}_n, \underline{\theta}) \right] + \text{Ln} \left[P_x(\underline{X}_n / \underline{\theta}) \right] \end{aligned}$$

Despejando la función objetivo o a maximizar, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \text{Ln} \left[P_x(\underline{X}_n / \underline{\theta}) \right] = \\ & = \text{Ln} \left[P_{x/y}(\underline{X}_n / \underline{Y}_n, \underline{\theta}) \right] + \\ & + \text{Ln} \left[P_y(\underline{Y}_n / \underline{\theta}) \right] - \text{Ln} \left[P_{y/x}(\underline{Y}_n / \underline{X}_n, \underline{\theta}) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.97})$$

Nótese que los términos de la derecha, siendo funciones de los datos completos y del vector de parámetros correcto están condicionados al valor que se asuma para este. En concreto, supóngase que se esta en un estado en que se ha asumido el valor $\underline{\theta}^{(i-1)}$ para el vector de parámetros. Al margen de que este valor no sea el correcto, es claro que asumiendo unos DOAs se puede encontrar las fuentes que sumarian el snapshot recibido. En otras palabras, por cada suposición que se realizase del vector de parámetros tendría una descomposición. Si se considera que esas suposiciones forman un v.a., es claro que la expresión (III.98) describe la verosimilitud de los datos incompletos.

$$\begin{aligned} L(\underline{\theta}) = & E_{\underline{\theta}^{(i-1)}} \left\{ \text{Ln} \left[P_{x/y}(\underline{X}_n / \underline{Y}_n, \underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i-1)}) \right] \right\} + \\ & + E_{\underline{\theta}^{(i-1)}} \left\{ \text{Ln} \left[P_y(\underline{Y}_n / \underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i-1)}) \right] \right\} - E_{\underline{\theta}^{(i-1)}} \left\{ \text{Ln} \left[P_{y/x}(\underline{Y}_n / \underline{X}_n, \underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i-1)}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.98})$$

No obstante, note que el primer termino establece lo verosímil de los datos incompletos dados los completos, claramente dados los segundos la información del vector de parámetros ya no es relevante a esta distribución (Ver (III.95)). En otras palabras, dados los datos completos, los incompletos se formulan directamente de estos sin necesidad alguna de los DOAs de las fuentes. De este modo el primer termino de (III.98) no depende de los parámetros a estimar y puede prescindirse de el en la minimizacion. Por lo tanto la expresión a maximizar sera:

$$L(\underline{\theta}) \propto E_{\underline{\theta}^{(i-1)}} \left\{ \text{Ln} \left[P_y(\underline{Y}_n / \underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i-1)}) \right] \right\} - E_{\underline{\theta}^{(i-1)}} \left\{ \text{Ln} \left[P_{y/x}(\underline{Y}_n / \underline{X}_n, \underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i-1)}) \right] \right\}$$

Es decir, la verosimilitud total es la diferencia de dos términos que dependen de la estimación disponible del vector de parámetros y de su valor correcto. Por esta razón, la expresión anterior puede formularse como se indica en (III.99).

$$L(\underline{\theta}) = U(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i-1)}) - V(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i-1)}) \quad (\text{III.99})$$

Lo más importante es que la segunda función, la que describe el valor esperado de la verosimilitud de los datos completos dados los incompletos, es una función cuyo máximo se obtiene cuando la estimación disponible coincide con la correcta. Es decir, si los parámetros no se conocen con exactitud la verosimilitud de los datos completos derivados de un vector de parámetros errónea será menor.

$$V(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i-1)}) < V(\underline{\theta}^{(i-1)}, \underline{\theta}^{(i-1)}) \quad \forall \underline{\theta} \neq \underline{\theta}^{(i-1)} \quad (\text{III.100})$$

Esta desigualdad, también referida o denominada como desigualdad de Jensen y trivial en nuestro caso, posibilita el argumentar que una iteración positiva sería encontrar un vector de parámetros $\underline{\theta}^i$ tal que se verificase (III.101) puesto que la otra función siempre decrece, como indica la expresión anterior.

$$U(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}^{i-1}) > U(\underline{\theta}^{i-1}, \underline{\theta}^{i-1}) \quad (\text{III.101})$$

Con todo lo anterior, el algoritmo se resume básicamente en dos pasos. El primer paso es formular la función $U(\cdot, \cdot)$ en función del vector de parámetros a estimar para cada fuente $\underline{\theta}^{(i)}$ y disponiendo de unos snapshots de los datos incompletos (Paso M). Es decir, para cada colección de snapshots de los datos completos estimar donde esta una sola fuente. Una vez obtenida esta estimación, para todos las fuentes o conjuntos de snapshots de los datos completos, $\underline{\theta}^{(i)}$, se estiman con ella los nuevos datos incompletos de los completos (Paso E), volviendo al paso M para obtener el siguiente $\underline{\theta}^{(i+1)}$. La iteración continua hasta alcanzar un máximo de la función $U(\cdot, \cdot)$.

A continuación se vera como el algoritmo se particulariza al caso de detección de DOA. Supóngase que el “snapshot” de la fuente s ($s=1, NS$) viene dado por (III.102). Donde el “steering” es el correcto, desconocido, y el ruido es la porción del total que se ha asignado a la fuente s .

$$\underline{Y}_{s,n} = \underline{S}_s \cdot \underline{a}_{s,n} + \underline{w}_{s,n} \quad (\text{III.102})$$

En relación al ruido asignado, normalmente se distribuye por igual a las NS fuentes. En cualquier caso en general el ruido asignado ha de verificar la relación siguiente por coherencia con el ruido de los datos completos. Recuerde que habitualmente se elige la situación menos comprometida en la que todos los multiplicadores son la unidad.

$$\begin{aligned} \underline{w}_n &= \sum_{s=1}^{NS} \beta_s \cdot \underline{w}_{s,n} \\ \underline{Q} &= \sum_{s=1}^{NS} \beta_s \cdot \underline{Q} \quad ; \quad \sum_{s=1}^{NS} \beta_s = 1 \end{aligned} \quad (\text{III.103})$$

Así pues el paso M es básicamente, dados los “snapshots” de la fuente s , estimar por máxima verosimilitud su nueva posición, obteniéndose así los “steerings” de todas ellas para el siguiente paso E.

$$\underline{S}_s(i) = \min \left\{ \text{traza} \left[\underline{Q} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{Y}_{s,n} - \underline{S}_s(i) \cdot \underline{\hat{a}}_{s,n} \right|^2 \right] \right\} \quad (\text{III.104})$$

Aunque aparentemente complicado, el estimador de Capon o su versión normalizada pueden emplearse en lugar de (III.104) con el mismo resultado. Note que se trata de máxima verosimilitud para una sola fuente presente. En el fondo, EM no es mas que el proceso para convertir un problema ML de NS incógnitas en NS problemas de una sola incógnita.

Una vez se dispone de la estimación de los “steerings” se ha de volver al paso E o de estimación. Es decir, dados los datos completos y los parámetros obtenidos del paso M, se procede a estimar de nuevo los datos completos de los originales o incompletos. Para ello, nótese que su relación es:

$$\underline{X}_n = \underline{H} \cdot \underline{Y}_n$$

Que la media de los datos completos es (III.105).

$$\underline{\Gamma}_{i,n} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1(i) \cdot a_1(n) \\ \cdot \\ \underline{S}_{NS}(i) \cdot a_{NS}(n) \end{bmatrix} = E(\underline{Y}_n) \quad (\text{III.105})$$

Que, la matriz de covarianza del vector de los datos completos es (III.106).

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 \cdot \underline{Q} & \cdot & \underline{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{0} & \cdot & \underline{\beta}_{NS} \cdot \underline{Q} \end{bmatrix} \quad (\text{III.106})$$

Y que, tanto los datos completos como incompletos tienen una distribución gaussiana, el estimador de media condicional resulta ser (III.107).

$$\underline{Y}_n = \underline{\Gamma}_{i,n} + \underline{\Lambda} \cdot \underline{H}^H \cdot (\underline{H} \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{H}^H)^{-1} \cdot (\underline{X}_n - \underline{H} \cdot \underline{\Gamma}_{i,n}) \quad (\text{III.107})$$

Con lo que el algoritmo completaría los dos pasos de que consta en cada iteración.

El estimador de la formula anterior es el de media condicional. Este estimador obtiene la estima de \underline{x} a partir de su media \underline{m}_x , del dato \underline{y} junto con su media \underline{m}_y y de las matrices de correlación cruzada. El estimador de media condicional de \underline{x} dado \underline{y} viene dado por (III.107.a) así como su covarianza (Ver curso de Procesado de Señal: Ejercicio del Capítulo II).

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}} &= \underline{m}_x + \underline{\Sigma}_{xy} \cdot \underline{\Sigma}_{yy}^{-1} \cdot (\underline{y} - \underline{m}_y) \\ \hat{\underline{\Sigma}} &= \underline{\Sigma}_{xx} - \underline{\Sigma}_{xy} \cdot \underline{\Sigma}_{yy}^{-1} \cdot \underline{\Sigma}_{yx} \end{aligned} \quad (\text{III.107.a})$$

No obstante, la interpretación mas interesante se desprende de utilizar la estructura que tanto la media como la covarianza del vector de los datos completos tienen. En efecto, tras usar ambas relaciones en la formula precedente, se obtiene una expresión directa o desacoplada para cada “snapshot” de las fuentes que viene dada por (III.108).

$$\underline{Y}_{s,n} = \underline{S}_s(i) \cdot a_s(n) - \underline{\beta}_s \cdot \left(\underline{X}_n - \sum_{m=1}^{NS} \underline{S}_m(i) \cdot a_m(n) \right) \quad (\text{III.108})$$

Esta expresión, para el caso de elegir todos los multiplicadores iguales a uno, es decir, distribuir por igual el ruido de los datos incompletos en los datos completos, toma la forma de (III.109).

$$\underline{Y}_{s,n} = \underline{X}_n - \sum_{m \neq s} \underline{S}_m(i) \cdot a_m(n) \quad (\text{III.109})$$

La interpretación de esta ecuación, que resume el paso E del algoritmo es muy interesante.

Nótese que, disponiendo de una estimación de DOA y señal de cada fuente, la generación del “snapshot” correspondiente se hace simplemente restando al “snapshot” total la que se le asume, sin ruido, a las otras fuentes. Este es el paso clave del EM, si se dispone de una estimación de las fuentes en la iteración $i-1$, se generan nuevos snapshots de una sola fuente, con estos se genera una nueva estimación de la fuente que constituye la iteración i , y así sucesivamente.

Una interpretación grafica de la forma de trabajar el EM, similar al concepto de “bootstrap” utilizado en electrónica analógica para generadores de barrido, es la colaboración entre la etapa de estimación de datos completos o fase E y la estimación de parámetros a partir de los datos completos. La Figura III.30 representa esquemáticamente la forma de trabajar del EM para dos fuentes. Las etapas etiquetadas como ML1 y ML2 representan el proceso de estimación ML del DOA y la señal para cada una de las dos fuentes sobre los datos completos generados en la primera etapa.

Es esta interpretación, intuitiva pero formal del EM, la que permite implementaciones mas efectivas y menos complejas del mismo procedimiento. Nótese que la clave estriba en como, del conocimiento mas o menos bueno de la posición de las fuentes y de su forma de onda, del “snapshot” original se sustraen, o se elimina su presencia, todas las fuentes menos una. También es de destacar que en esta versión, la correcta, del EM, el procesador de la segunda etapa o etapa M, requiere estimar tanto el vector de “steering” como la forma de onda para, al volver a la etapa E, cancelar adecuadamente las señales.

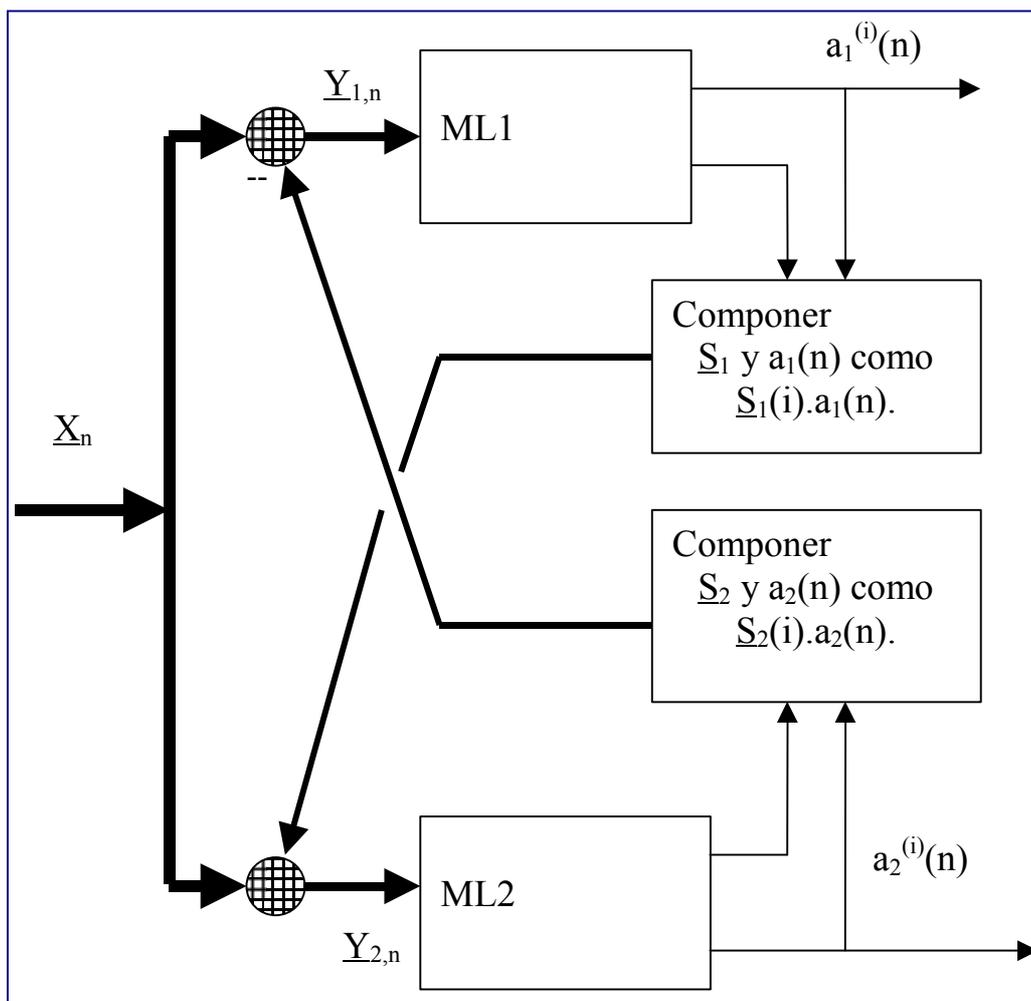


Figura III.30. Representación grafica del algoritmo EM para el caso de un escenario con dos fuentes. Los datos completos se generan por sustracción directa de la contribución de señal previamente estimada para cada una de las fuentes.

Antes de dejar el presente apartado, es de mencionar que el EM descrito es valido para lo que se denomina problema ML determinístico. Existe una versión también del EM para el problema ML aleatorio. Básicamente, todo se traduce en un proceso de E-M pero sobre matrices de covarianza de los datos completos e incompletos. Su planteamiento es sencillo y fácil de derivar a partir de lo expuesto y se resumirá a continuación. En primer lugar, el planteamiento del caso aleatorio conlleva el plantear la contribución de señal al “snapshot” como aleatoria. Con esta hipótesis, la distribución del “snapshot” será gaussiana de media nula y de matriz de covarianza $\underline{\underline{C}}_x$. La verosimilitud para N snapshots es:

$$L(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{C}}_s, \sigma^2) = -\ln[\det(\underline{\underline{C}}_x)] + \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \underline{\underline{X}}_n^H \cdot \underline{\underline{C}}_x^{-1} \cdot \underline{\underline{X}}_n \quad (\text{III.110})$$

o bien $-\ln[\det(\underline{\underline{C}}_x)] + \text{Traza}(\underline{\underline{C}}_x \cdot \underline{\underline{C}}_x^{-1})$ con $\hat{\underline{\underline{C}}}_x = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \underline{\underline{X}}_n^H \cdot \underline{\underline{X}}_n$

Siendo

$$\underline{\underline{C}}_x = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{C}}_s \cdot \underline{\underline{S}}^H + \sigma^2 \cdot \underline{\underline{I}} \quad (\text{III.111})$$

El algoritmo ML habría de estimar todas las componentes de esta matriz de forma y manera que se produjese un máximo en la verosimilitud. Las expresiones que resultan, derivadas de proceso de minimización se reproducen a continuación, a la izquierda de (III.112). También, y con el fin de evidenciar la sencillez para el caso de una sola fuente (caso cuando se use el EM), las formulas se expresan para el caso de una sola fuente en el escenario a la derecha de cada una de las formulas generales, que serian las que se emplearan en el paso M del EM estocástico.

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\underline{S}}} &= \min_{\underline{\underline{S}}} \left\{ \text{traza} \left(\underline{\underline{P}} \cdot \hat{\underline{\underline{C}}}_x \right) \right\} \Rightarrow |NS=1|, \hat{\underline{\underline{S}}} = \max_{\underline{\underline{S}}} \left\{ \underline{\underline{S}}^H \cdot \hat{\underline{\underline{C}}}_x \cdot \underline{\underline{S}} \right\} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{Q-NS} \text{traza} \left[\underline{\underline{P}} \cdot \hat{\underline{\underline{C}}}_x \right] \Rightarrow |NS=1|, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{Q-1} \left(Q \cdot \hat{r}(0) - \hat{\underline{\underline{S}}}^H \cdot \hat{\underline{\underline{C}}}_x \cdot \hat{\underline{\underline{S}}} \right) \\ \hat{\underline{\underline{C}}}_s &= \underline{\underline{S}}^H \cdot \left(\hat{\underline{\underline{C}}}_x - \hat{\sigma}^2 \cdot \underline{\underline{I}} \right) \cdot \underline{\underline{S}} \Rightarrow |NS=1|, \hat{\underline{\underline{P}}}_s = \frac{1}{Q^2} \cdot \left(\hat{\underline{\underline{S}}}^H \cdot \hat{\underline{\underline{C}}}_x \cdot \hat{\underline{\underline{S}}} - Q \cdot \hat{\sigma}^2 \right) \\ \text{siendo } \underline{\underline{P}} &= \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{S}} \cdot \left[\underline{\underline{S}}^H \cdot \underline{\underline{S}} \right]^{-1} \cdot \underline{\underline{S}}^H \end{aligned} \quad (\text{III.112})$$

En estas expresiones puede ver el lector hasta que grado se reduce la complejidad cuando se trata de una sola fuente que es precisamente lo que brinda el EM.

El algoritmo EM aplicado al problema anterior convierte la etapa de E, que genera las matrices de covarianza de los datos completos en:

$$\underline{\underline{C}}_{y,s}(i) = \underline{\underline{C}}_{y,s}(i-1) - \underline{\underline{C}}_{y,s}(i-1) \cdot \underline{\underline{C}}_x^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}_{y,s}(i-1) + \underline{\underline{C}}_{y,s}(i-1) \cdot \underline{\underline{C}}_x^{-1} \cdot \hat{\underline{\underline{C}}}_x \cdot \underline{\underline{C}}_x^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}_{y,s}(i-1)$$

Que no es más que la covarianza asociada a la estimación de media condicional de los datos completos, dados los incompletos y la estimación previa. Por otro lado, el paso M, consiste en las ecuaciones (III.112) aplicadas al escenario de una sola fuente de los datos completos.

En cualquier caso, la interpretación de bloqueo o eliminación de todas las fuentes menos una, no es tan obvio en la versión SML (Statistical ML) como en el DML (Deterministic ML). Es precisamente este proceso de anulación el que da lugar a una implementación brillante en robustez y sencillez del método EM en el próximo apartado.

Ha de recordarse que la supresión, por resta de contribuciones, obliga al segundo paso a la correcta estimación no solo del vector de “steering” de la fuente, sino también de su forma de onda. Es decir, el número de valores a estimar es elevado, la cancelación en la resta es pobre y todo ello trae como

consecuencia una excesiva ralentización del algoritmo de cara a su utilidad práctica. De hecho, dependiendo del escenario, puede presentar una convergencia no uniforme.

Es de destacar que los principios básicos del EM pueden considerarse la raíz de los modernos métodos de separación de fuentes. También presenta una similitud extraordinaria con redes neuronales con sistemas de inhibición lateral. Podría interpretarse en la figura anterior como que los procesadores ML1 y ML2 son las dos neuronas de un sistema que van inhibiendo la información a su compañera a medida que ellas las adquieren mejor y mejor en cada iteración. En cualquier caso, y al margen de estas interpretaciones, se está ante el único algoritmo que, de manera formal y precisa, proporciona la estimación óptima de los “steerings” o vectores de posición de las fuentes. Tan solo la sencillez y robustez de los procedimientos expuestos previamente representa un problema de cara a su uso.

Nótese también, que el procedimiento no carece de “scanning”, aun más, este está implícito como corresponde a un método de máxima verosimilitud, la ventaja es que la exploración al llevarse a cabo sobre los datos completos es tan solo de una fuente. Es decir, se cambia una exploración simultánea en NS dimensiones por NS exploraciones en una sola dimensión lo que es mucho menos complejo.

III.10 METODOS DE BLOQUEO.

Una de las desventajas planteadas por el algoritmo EM en su versión original, es que requiere del conocimiento de la forma de onda asociada a cada fuente, para proceder a la generación de los datos completos a partir de los incompletos. En otras palabras, el bloqueo de cada una de las fuentes, implícito en la expresión (III.109), no solo requiere de la información espacial de la posición de la fuente para formar el “steering”, sino también de la forma de onda que emiten las fuentes a bloquear. La razón estriba en que se opta, y así es lo óptimo, por la resta como operación básica de bloqueo de las NS-1 fuentes.

Tomando esta operación como un mero proceso de bloqueo de una fuente, una alternativa subóptima sería recurrir a las matrices de bloqueo ya empleadas en el diseño del GSLC en el capítulo anterior. De este modo, bloquear de un “snapshot” \underline{X}_n , de Q elementos, una fuente cuyo “steering” está formado por $\exp(j.u_{q,s})$, siendo q el sensor y s la fuente, es multiplicarle por la siguiente matriz de dimensiones Q,Q-1:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\exp(j(u_{s2} - u_{s1})) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\exp(j(u_{s3} - u_{s2})) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \exp(j(u_{sQ-1} - u_{sQ-2})) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \exp(j(u_{sQ} - u_{sQ-1})) \end{bmatrix}$$

Es decir, cada vez que se bloquea una fuente la dimensión del snapshot resultante decrece en una dimensión. El snapshot de los datos completos para la fuente q sería:

$$\underline{Y}_{s,n} = \underline{X}_n \cdot \prod_{q \neq s}^{NS} G \quad (III.113)$$

Claramente, el proceso de generar los datos completos, a partir de los incompletos requiere tan solo de las posiciones de las fuentes y es independiente de la forma de onda. Al mismo tiempo, el ruido asignado a los datos completos se realiza de manera, digamos, más natural que en el caso de que el bloqueo se realice por resta.

El esquema del procesador ahora para estar formado por redes de bloqueo de las direcciones del resto de fuentes, seguido de un estimador NMLM para la localización de cada fuente. Nótese que, si en los datos completos existe una sola fuente, en ruido espacial coloreado por efecto del bloqueo, aun NMLM es el procedimiento óptimo del paso M, es decir, para localizar una sola fuente en ruido coloreado.

Si bien es cierto que al comienzo el bloqueo, aunque sea resta, no es perfecto, lo que es de esperar es que la fuente no bloqueada sea la más fuerte. Por esta razón, la posición del ángulo de la fuente

s se obtendrá del máximo del estimador mencionado. Es decir, dada la matriz de covarianza de los datos completos para cada fuente s ,

$$\underline{\underline{R}}_s = E[\underline{Y}_{s,n} \cdot \underline{Y}_{s,n}^H] \quad (\text{III.114})$$

Se diseña el conformador que explora el escenario, evitando las direcciones de las otras fuentes, como se indica en (III.115).

$$\begin{aligned} \underline{A}^H \cdot \underline{S} &= 1 \\ \underline{A}^H \cdot \underline{\underline{R}}_s \cdot \underline{A} \Big|_{\text{MIN}} \end{aligned} \quad (\text{III.115})$$

Con el conformador resultante, se estima el ángulo de la fuente siguiendo (III.116).

$$\text{MAX} \frac{\underline{A}^H \cdot \underline{\underline{R}}_s \cdot \underline{A}}{\underline{A}^H \cdot \underline{A}} = \frac{\underline{S}^H \cdot \underline{\underline{R}}_s^{-1} \cdot \underline{S}}{\underline{S}^H \cdot \underline{\underline{R}}_s^{-2} \cdot \underline{S}} \rightarrow \theta_s \quad (\text{III.116})$$

El esquema del procesador de bloqueo, para dos fuentes, sería el de la Figura III.31, donde se le ha añadido un filtro de Kalman que suaviza las estimaciones de los DOAs antes de devolverlos de nuevo a la etapa de bloqueo. La inclusión de dicha etapa es importante en la calidad del diseño por lo que, al final del apartado se explicará su diseño. Básicamente, el filtro de Kalman estima la trayectoria de la fuente con lo que, en el caso de fallo en el sistema de localización el filtro estima el ángulo basado en su conocimiento de la trayectoria de la fuente correspondiente.

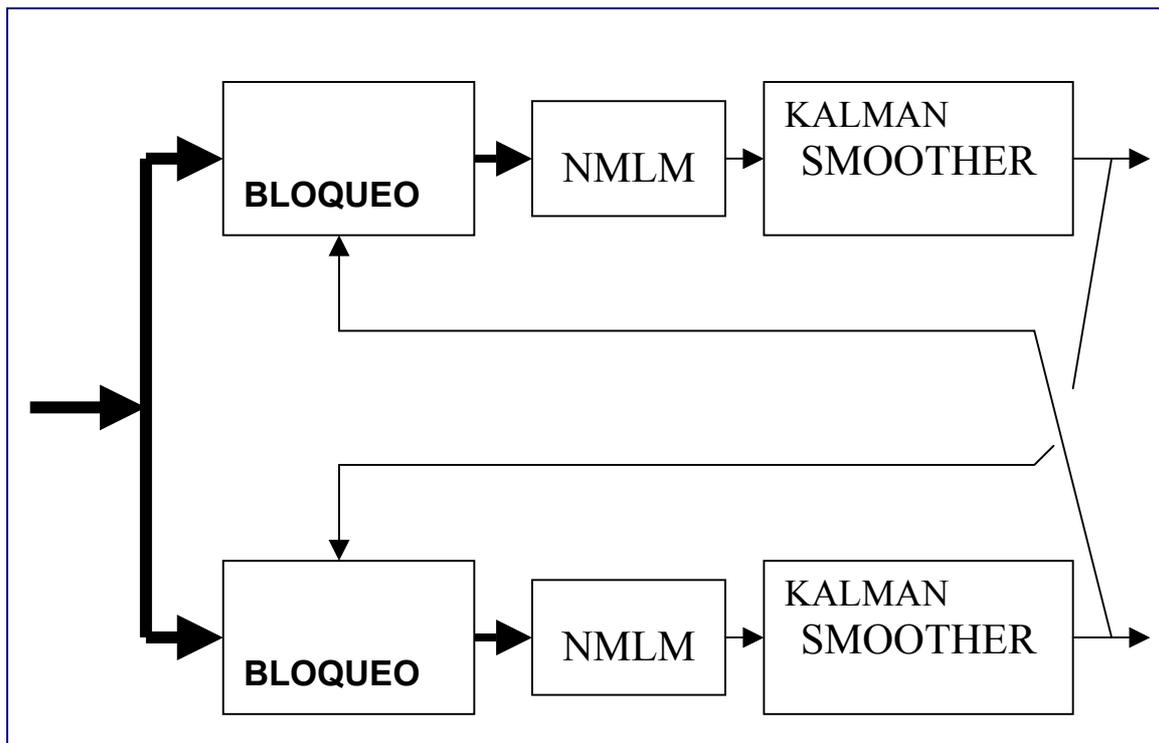


Figura III.31. EM con sistema de bloqueo en la etapa E, NMLM para la etapa M y un filtro de Kalman para suavizar, a partir de la trayectoria, la estimación de DOA de cada una de las fuentes.

Esta arquitectura, denominada RCAP (ver referencias), es similar al denominado método AP (‘‘Alternate Projection’’ debido a M. Wax). No obstante a su parecido, lo que sigue marca diferencias a favor de RCAP sobre AP.

La simplificación que sigue radica en el hecho de que el bloqueo del resto de fuentes y el estimador NMLM pueden realizarse en una sola etapa. En concreto, centrándose en la rama correspondiente a la fuente s , la red de bloqueo tiene por misión eliminar todas las fuentes salvo la s . Una vez eliminadas, el conformador de NMLM se diseña para explorar todas las direcciones y encontrar el máximo de densidad. No obstante, el diseño del conformador puede modificarse de tal manera que además de enfocarse a la dirección que explora, anule el resto de las fuentes. En otras palabras, bloqueo y NMLM pasan a ser una sola etapa. El conformador deseado habrá de cumplir ahora NS restricciones que son enfocarse a la dirección explorada \underline{S} y anular los vectores de dirección del resto. Al tratar directamente los datos, la matriz de covarianza es la de los datos originales para todas las ramas. En definitiva, el diseño para la rama s se reduce a encontrar el conformador que verifica las restricciones (III.117.a).

$$\underline{A}^H \cdot [\underline{S}, \underline{S}_1, \dots, \underline{S}_{s-1}, \underline{S}_{s+1}, \dots, \underline{S}_{NS}] = [1, 0, \dots, 0] \quad (\text{III.117.a})$$

O bien (III.117.b) en su versión matricial.

$$\underline{A}^H \cdot \underline{C}_{\underline{s}} = \underline{1} \quad (\text{III.117.b})$$

El objetivo a minimizar sigue siendo la potencia a la salida del conformador.

$$\underline{A}^H \cdot \underline{R}_{\underline{x}} \cdot \underline{A} \quad (\text{III.118})$$

Notese que cuando el vector de exploración se acerca a una de las posiciones de las otras fuentes, no se debe calcular el estimador pues las restricciones serían contradictorias. Además, no tiene sentido buscar una fuente que está exactamente en la dirección de otra pues serían la misma.

El conformador resultante es:

$$\underline{A} = \underline{R}_{\underline{x}}^{-1} \cdot \underline{C}_{\underline{s}} \cdot \left(\underline{C}_{\underline{s}}^H \cdot \underline{R}_{\underline{x}}^{-1} \cdot \underline{C}_{\underline{s}} \right)^{-1} \cdot \underline{1} \quad (\text{III.119})$$

Y el estimador, para cada dirección \underline{S} se obtendría de emplear dicho conformador en la expresión del estimador NMLM (ver primer miembro de III.116). Del máximo de esta expresión se obtendría el estimador θ_s^n para la siguiente iteración.

Vease que el proceso se puede repetir varias veces sin necesidad de adquirir más “snapshots” hasta que los ángulos apenas cambian. Una vez realizado la estimación iterativa, se puede volver a coger N “snapshots” y repetir el proceso, con lo que se dispone de un procedimiento rápido para el seguimiento de trayectoria de las fuentes.

Una simplificación que impacta muy positivamente en el valor práctico de RCAP radica en el hecho de que, una vez bloqueadas todas las fuentes menos la que se busca, en el escenario queda tan solo el ruido no direccional más la fuente s , en la rama s correspondiente, por lo tanto, el conformador puede reducirse para el caso de que la matriz de covarianza para el diseño del conformador sea la identidad. En esta situación, el conformador se reduce a (III.120), mucho más sencillo e independiente de la covarianza del escenario.

$$\underline{A} = \underline{C}_{\underline{s}} \cdot \left(\underline{C}_{\underline{s}}^H \cdot \underline{C}_{\underline{s}} \right)^{-1} \cdot \underline{1} \quad (\text{III.120})$$

Con este planteamiento, tanto el diseño como la búsqueda del máximo de (III.121) se simplifican mucho.

$$\frac{\underline{A}^H \cdot \underline{R}_{\underline{x}} \cdot \underline{A}}{\underline{A}^H \cdot \underline{A}} = \frac{\underline{1}^H \cdot \left(\underline{C}_{\underline{s}}^H \cdot \underline{C}_{\underline{s}} \right)^{-1} \cdot \underline{C}_{\underline{s}}^H \cdot \underline{R}_{\underline{x}} \cdot \underline{C}_{\underline{s}} \cdot \left(\underline{C}_{\underline{s}}^H \cdot \underline{C}_{\underline{s}} \right)^{-1} \cdot \underline{1}}{\underline{1}^H \cdot \left(\underline{C}_{\underline{s}}^H \cdot \underline{C}_{\underline{s}} \right)^{-1} \cdot \underline{1}} \quad (\text{III.121})$$

Notese que la matriz a invertir es de (NS,NS), es decir de (2,2) para dos fuentes. Además, no se requiere ni invertir ni descomposición SVD de la matriz de covarianza, con lo que se obtienen dos cualidades, prácticamente inexistentes en todos los métodos anteriores que no fuesen el ML o el EM exacto, y es que no afecta el problema de fuentes coherentes. Incluso se requieren muy pocos “snapshots” para estimar la matriz de covarianza gracias a que su mal condicionamiento no será un problema.

Las pruebas o simulaciones que se exponen más adelante se realizaron con tan solo 10! “snapshots” para estimar la matriz de covarianza. Este resultado es imposible en cualquiera de los procedimientos clásicos, y todo con una calidad prácticamente idéntica al método ML exacto. Con respecto a la exploración, para encontrar el máximo, notese que tan solo es necesario buscar alrededor de la posición previa. La razón es que al realizarse estimaciones sucesivas en intervalos de tiempo cortos, la fuente no ha tenido mucho tiempo de moverse con respecto a la estimación anterior. Esto redundará en una sustancial reducción del tiempo necesario para la búsqueda del máximo.

Antes de pasar a exponer los resultados se expondrá el diseño de los filtros de Kalman para cada rama. Como se ha mencionado, estos sistemas estiman trayectoria de las fuentes con lo que se reenvía a la próxima iteración es un óptimo entre la trayectoria que sigue la fuente y la estimación que proporciona el máximo de (III.121). Más detalles pueden verse en las notas de Procesado de Señal en su capítulo relativo a sistemas adaptativos.

Considerando que se desea diseñar el filtro de Kalman para la rama s , el filtro de Kalman recibe la estimación del ángulo de dicha fuente a partir del máximo de (III.121). Se denominará a dicha estimación $\tilde{\theta}_s(n)$ de elevación y $\hat{\varphi}_s(n)$ de azimuth. Recordando de procesado de señal el diseño del filtro de Kalman, este requiere de la formulación del modelo de Gauss para el estado a estimar, para ello se considerará que la fuente define su estado por sus dos ángulos, elevación y azimuth, junto con sus velocidades (puede incluirse también aceleración si se desea). Con lo que el vector de estado, a estimar, del modelo será:

$$\underline{\theta}(n) = \begin{bmatrix} \theta_s(n) \\ \varphi_s(n) \\ \dot{\theta}_s(n) \\ \dot{\varphi}_s(n) \end{bmatrix} \quad (\text{III.122})$$

Tomando T como el tiempo entre cada estimación, i.e. 10 “snapshots” que son los empleados entre cada estimación del NMLM, la ecuación del vector de estado vendrá dada por:

$$\underline{\theta}(n+1) = \underline{F} \cdot \underline{\theta}(n) + \underline{v}(n) \quad (\text{III.123})$$

Siendo:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.124})$$

Como puede verse la matriz de transición refleja un movimiento de velocidad constante, las aceleraciones pasan a participar en el vector $\underline{v}(n)$ vía su matriz de covarianza \underline{Q} que será diagonal e incluirá las desviaciones previstas sobre el movimiento de velocidad constante. Valores de las diagonales iguales a 10^{-3} son adecuados incluso en escenarios donde las fuentes presenten una gran movilidad.

La ecuación de medida, denota que tan solo los ángulos son observables y es del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}(n) \\ \hat{\varphi}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta(n) + \underline{w}(n) = \underline{H} \cdot \theta(n) + \underline{w}(n) \quad (\text{III.125})$$

Donde el vector $\underline{w}(n)$ denota el ruido de la estimacion que introduce el metodo NMLM que se considera independiente para elevacion y azimuth y de potencia L_o , habitualmente supuesta igual a la unidad.

Con este modelo puede diseñarse el sistema que permite estimar, a partir de las medidas las posiciones y velocidades de las fuentes. Las primeras son pasadas de nuevo al diseño de los conformadores para iterar el procedimiento.

Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}(n) &= \hat{\theta}(n) - \tilde{\theta}(n) \\ \underline{K} &= \underline{F} \cdot \underline{\Sigma}_n \cdot \underline{H}^H \cdot [\underline{H} \cdot \underline{\Sigma}_n \cdot \underline{H}^H + L_o \cdot \underline{I}]^{-1} \\ \hat{\theta}(n+1) &= \underline{F} \cdot \hat{\theta}(n) + \underline{K} \cdot \underline{\varepsilon}(n) \\ \underline{\Sigma}_{n+1} &= \underline{F} \cdot \underline{\Sigma}_n \cdot \underline{F}^H + \underline{Q} - \underline{K} \cdot [\underline{H} \cdot \underline{\Sigma}_n \cdot \underline{H}^H + L_o \cdot \underline{I}] \cdot \underline{K}^H \end{aligned} \quad (\text{III.126})$$

Estas ecuaciones permiten obtener a partir de la medida a la salida del metodo NMLM, un estimador del vector de estado que, no solamente proporciona una version de los angulos de la fuente, sino que ademas estima su velocidad en ambos angulos. Para mnas detalles, se recomienda al lector revisar los principios del filtro de Kalman en procesado de señal.

En las figuras siguientes se puede observar el comportamiento del algoritmo, o la arquitectura de la Figura III.31 para el caso de una apertura lineal de 8 sensores. La matriz de covarianza se estima recursivamente con un factor de olvido de 0.9, es decir de 10 snapshots,

$$\underline{R}_x(n) = \beta \cdot \underline{R}_x(n-1) + (1-\beta) \cdot \underline{X}_n \cdot \underline{X}_n^H \quad (\text{III.127})$$

Las fuentes son dos de 15 y 5 dB. Ambas son completamente coherentes, una situacion en la que el resto de los procedimientos no funcionaria correctamente. Las fuentes tiene una velocidad en elevacion de 0.01 grados por snapshot.

Como podra ver el lector, el cruce de trayectorias es correctamente resuelto gracias al filtro de Kalman que en la zona extrapola la trayectoria de cada fuente dando un cruce nitido de ambas en la estimacion. Por cada matriz se realizaron tres iteraciones maximo en la arquitectura, antes de pasar a la actualizacion indicada en (III.127).

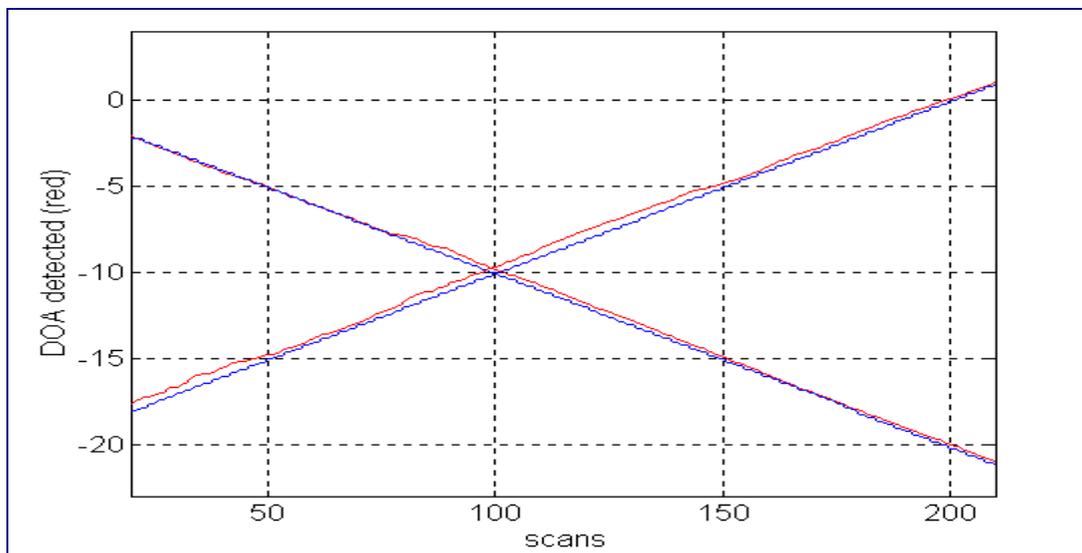


Figura III.32. Estimacion de DOA de dos fuentes para apertura ULA de 8 sensores.

La misma arquitectura y procedimiento fueron empleados en el caso de una apertura planar, controlando elevacion y azimuth junto con sus respectivas velocidades. La apertura era circular de 12 sensores, 8 en un circulo de radio igual a la longitud de onda y cuatro en un circulo de longitud de onda mitad. La velocidad en azimuth y elevacion eran -0.09° y -0.02° para la primera fuente y 0.1° y -0.032° para la segunda. Las fuentes eran coherentes y de 15 dB cada una con respecto al nivel de ruido. De nuevo puede observarse la calidad de la estimacion en la figura correspondiente.

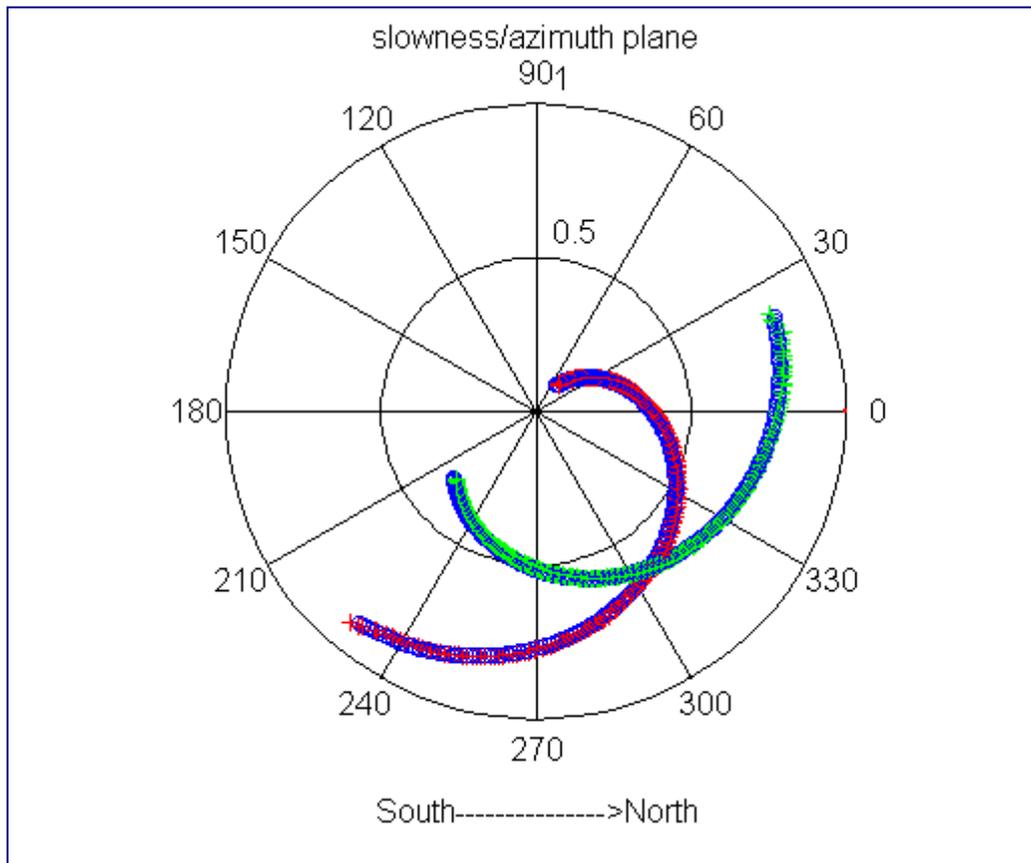


Figura III.33. Comportamiento de RCAP en el caso de una apertura planar y con dos fuentes en movimiento. De nuevo el cruce del estimador es nitido y las trayectorias de las fuentes clara y precisa.

Una aplicación derivada del diseño del estimador de DOA anterior es la de diseñar un conformador que enfocando una dirección, anule todas las señales presentes en un escenario. La idea es inicializar un conformador que enfoca la dirección deseada junto con la restricción de mínima norma. Esta es la inicialización del método de diseño. A continuación, bloqueando la dirección deseada, se explora el espacio para buscar interferencias, el método es básicamente el mismo que el indicado para detección de DOA. Del estimador de DOA se selecciona la dirección en la que se encuentra un máximo. Se rehace, de nuevo, el diseño del conformador como el que enfoca la dirección deseada y bloquea la dirección de máximo encontrada. De nuevo, se repite la exploración pero ahora enfocando la dirección deseada y bloqueando la dirección interferente. Sobre el máximo de la estimación se vuelve a diseñar el conformador, ahora enfocando la deseada y bloqueando dos direcciones. El proceso continúa hasta que la exploración con bloqueo de las direcciones encontradas es plano, es decir, no encuentra más interferencias. El diseño, puede hacerse también con control de quiescent, exactamente igual que en el caso del GSLC.

A continuación se representa el “quiescent” (“phased array”) con dirección de enfoque igual al broadside, de una apertura de 15 elementos. El resto de líneas verticales de la Figura III.34 indica la presencia de interferencias, de hecho las tres contiguas son un cluster de llegadas coherentes.

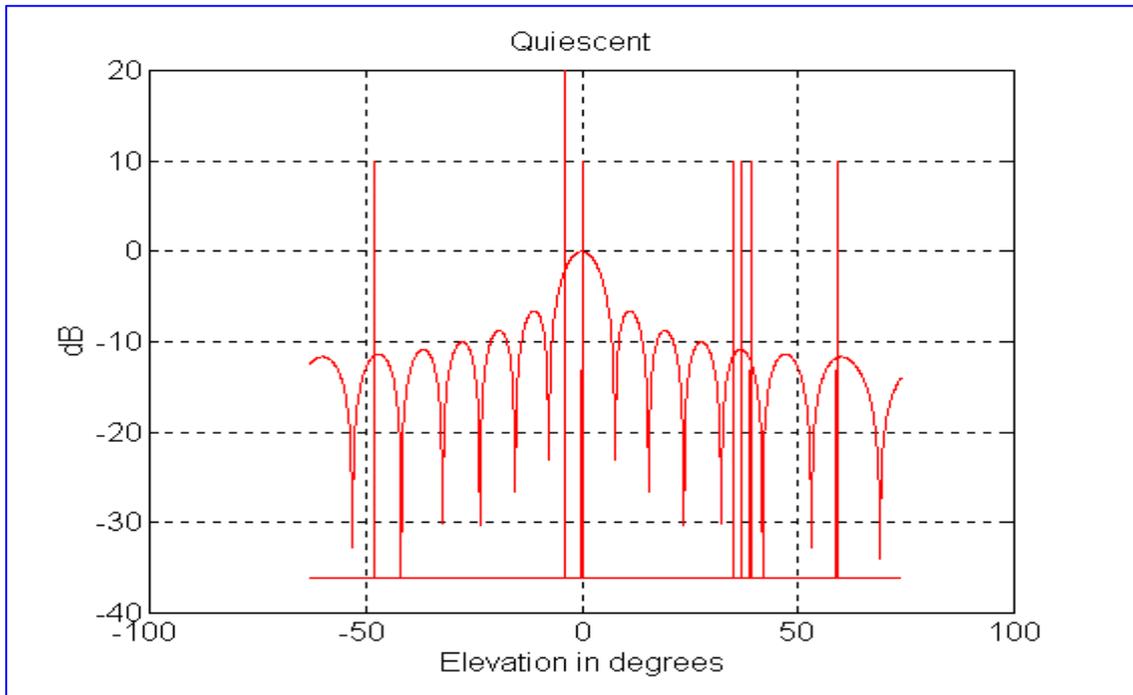
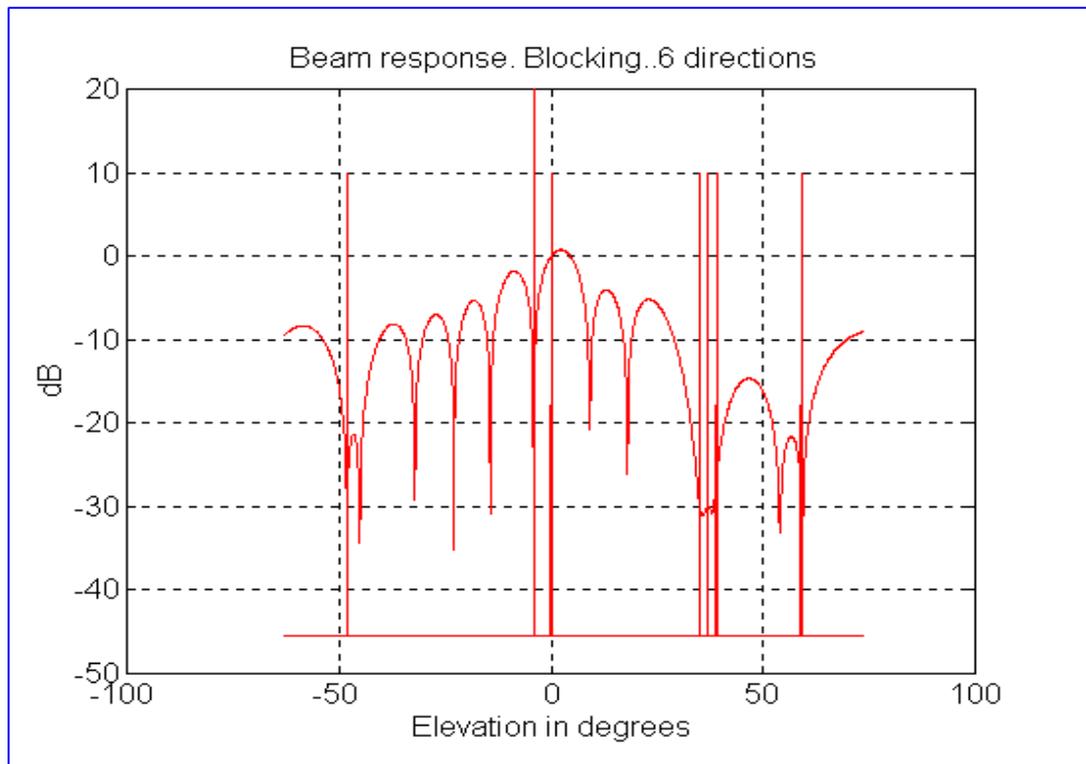


Figura III.34. Quiescent de una apertura enfocada al broadside de 15 elementos con 5 interferencias marcadas en la imagen con líneas verticales.

Después de iterar e ir anulando progresivamente los máximos del estimador espectral, la figura siguiente muestra el conformador diseñado, donde se aprecia la correcta anulación de las direcciones interferentes.



Con respecto a como queda el estimador de DOA cuando las direcciones anteriores han sido bloqueadas, tal y como puede verse en la figura, este queda plano indicando que el conformador no requiere mas iteraciones.

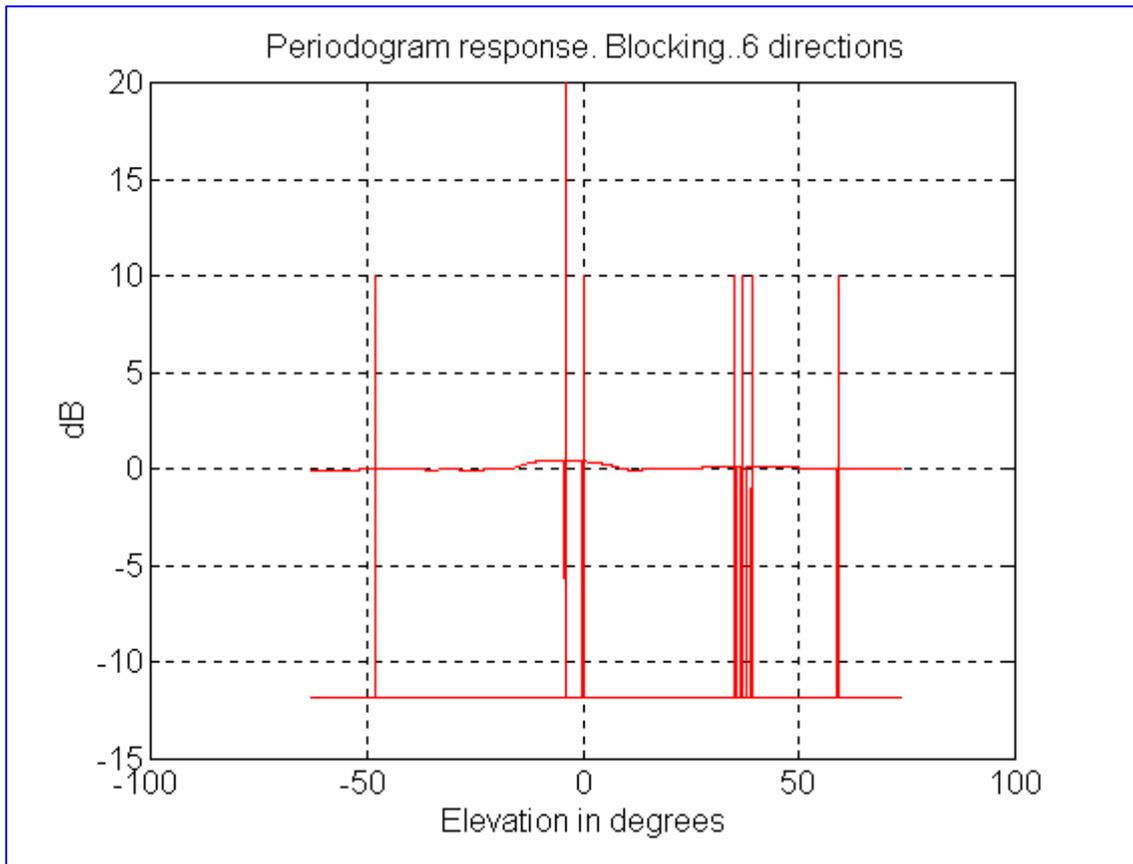


Figura III.35. Estimador de DOA explorado con anulacion de seis direcciones. Su comportamiento plano denota la no existencia de mas interferencias presentes en el escenario.

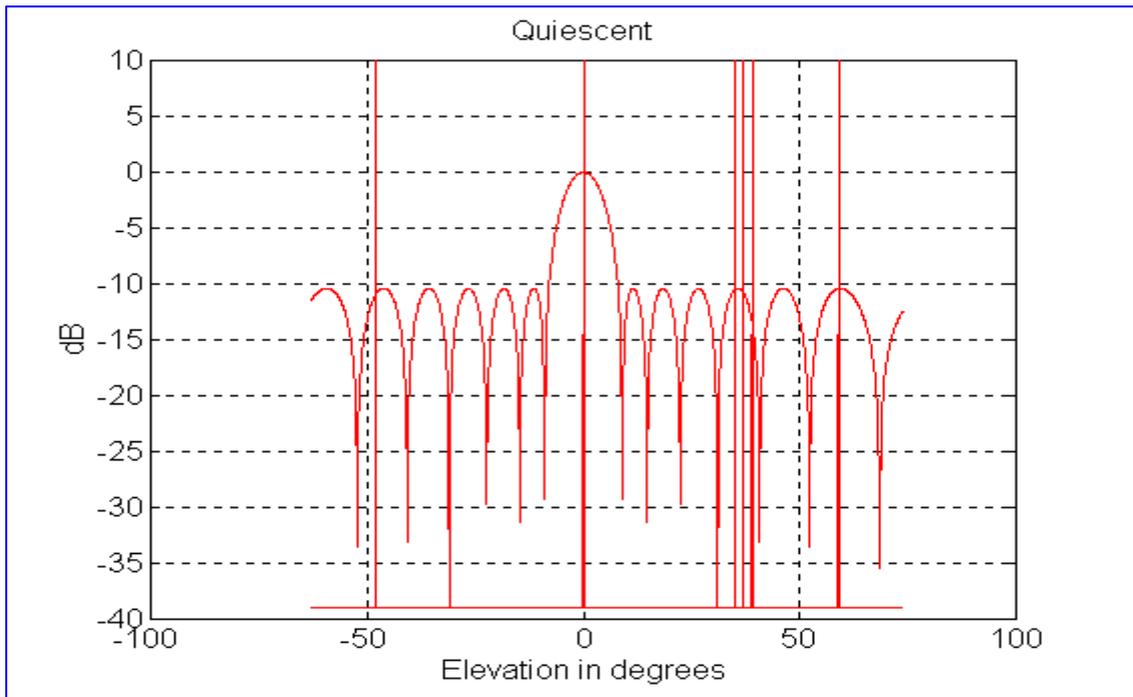


Figura III.36. Diagrama de reposo o inicial para lobulo lateral uniforme.

La Figura III.36 presenta el diagrama inicial, antes de proceder a la cancelacion de interferencias del tapering D-H

Como se ha mencionado, el procedimiento permite control de quiescent. Basicamente el conformador, en cada iteracion, se le obliga a enfocar la direccion del broadside, anular los maximos sucesivos encontrados en el estimador de DOA, y verificar que sus lobulos laterales sean lo mas uniformes posibles, es decir, su distancia con los coeficientes de una apertura de ponderacion Taylor (Dolph-Cheb. Tapering D-H) sea lo mas pequeña posible (igual que en el control de quiescent para GSLC). En la figura III.36 puede verse el diagrama inicial y en la III.37 el conformado.

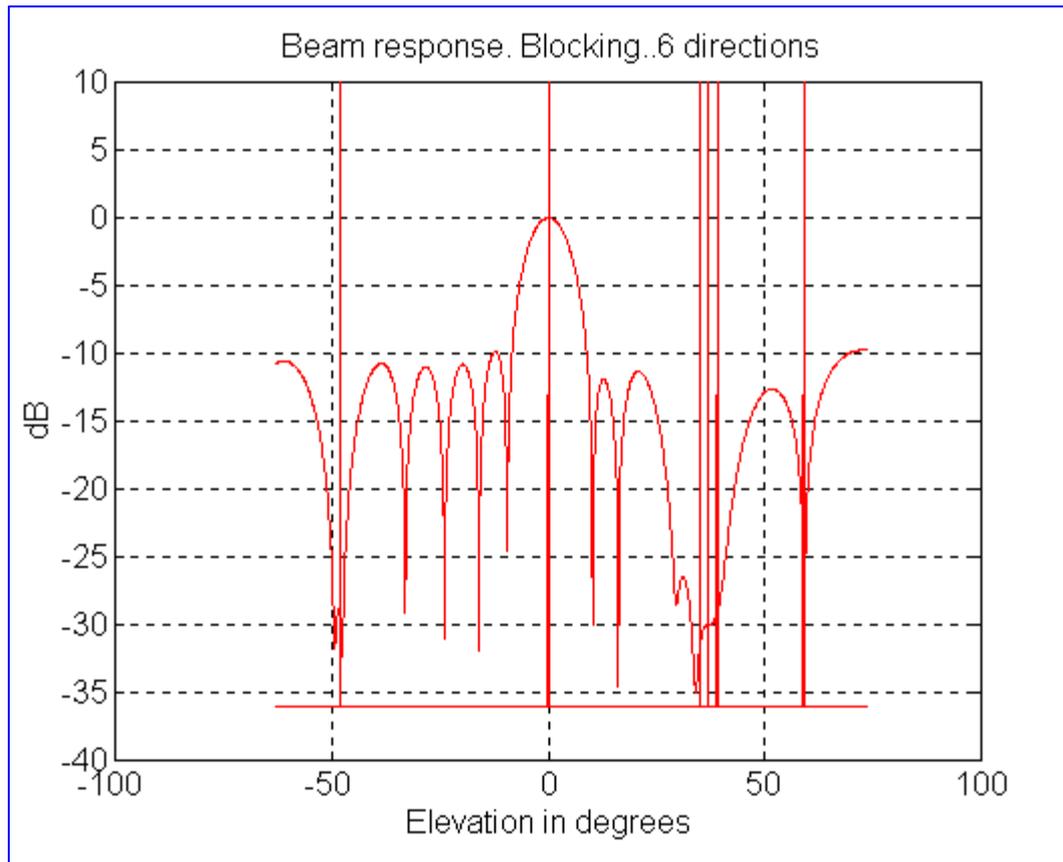


Figura III.37. Diagrama conformado con control de quiescent.

Como ha podido verse, la arquitectura RCAP, como forma subóptima de implementación del EM, se muestra como el método más robusto y de mayor resolución para todo tipo de escenarios para el seguimiento de fuentes. La misma técnica de exploración con restricciones de bloqueo es útil para el diseño de conformadores adaptados al escenario, incluso manteniendo restricciones de forma o también denominadas de quiescent.

III.11. CONCLUSIONES

El presente capítulo ha expuesto las técnicas más habituales para la estimación de ángulo de llegada. Todas ellas están basadas, de un modo u otro, en el manejo del vector de enfoque. Esto implica que absolutamente todas son sensibles a los problemas de calibración. Sin haberse ocupado del tema, se ha de destacar que la robustez de cada una de ellas a las tolerancias en calibración es un argumento que puede alterar sustancialmente su clasificación basada solo en términos de resolución.

La presentación comenzó con las dos técnicas básicas de anulación y exploración. La segunda está basada en la medida de potencia, después normalizada al ancho de haz al ruido, para la estimación de densidad. Básicamente dos métodos son populares: el conformador independiente de los datos o phased array y el de Capon, incluyendo su versión normalizada. Es de destacar, que el denominado MLM y su versión NMLM son, hoy por hoy, los métodos más empleados por calidad y robustez incluso a favor de otras técnicas. El primero para la estimación del nivel de potencia y el segundo para la localización.

Previamente, se presentó el problema de detección de DOA en banda ancha y como se ha de conducir la focalización para convertirlo en un problema de banda estrecha, sin deteriorar la relación señal a ruido de la fuente. En concreto, para el caso de aperturas lineales, el procedimiento de focalización se reduce a promedios direccionales sobre la 2-FFT, espacial y temporal de los snapshots recibidos.

Dentro de los metodos de anulacion, el metodo mas popular es Music. De hecho su desarrollo permite justificar de manera elegante como los procedimientos, tanto de anulacion como de exploracion, abordan el problema de la resolucion. Cuanto mayor es el impacto de subespacio de ruido en su formulacion final, mejor es el estimador. Tanto Music como prediccion lineal, este segundo en desuso frente al primero, has sido expuestos, mostrando que sobre arrays perfectamente calibrados son imbatibles si se les compara con los metodos de exploracion.

A continuacion se ha comentado el problema del scanning o exploracion de los estimadores y la solucion aportada bajo la denominacion de metodo Esprit. Basada en el proceso de aperturas gemelas, Esprit convierte el problema de scanning en una determinacion directa de los retardos de fase para cada fuente presente en el escenario. Esprit revitaliza el principio de la prediccion lineal pero esta vez sobre snapshots, el predictor pasa a ser una matriz y sus autovalores los NS retardos de fase de las fuentes. El calculo de la matriz de prediccion, para independizarse lo mas posible del ruido se realiza sobre los espacio de señal de cada apertura, derivando en un procedimiento de Total Least Squares (TLS).

Seguidamente se ha presentado el metodo de Maxima verosimilitud, evidenciando su complejidad cuqndo el numero de fuentes es superior a una. La complejidad de ML promueve la aparicion del algoritmo EM que, basicamente, reduce de manera iterativa un problema ML de NS fuentes en NS problemas de una sola fuente. Al presentarse la elaboracion de los denominados datos completos, realizada por sustraccion, se sugiere la idea de utilizar mecanismos de bloqueo de direcciones en lugar de la resta de contribuciones de cada fuente. Procediendo de este modo se evita la necesidad de estimar las formas de onda y se reduce a un procedimiento del que, de los datos completos, tan solo se requiere conocimiento de sus vectores de enfoque. La aquitectura resultante se denomina RCAP (Reduced Complexity Array Processing) y conduce basicamente al diseño de conformadores con restricciones multiples de bloqueo de direcciones. Para mejorar el comportamiento se recurre al empleo de filtro de Kalman para mejorar las estimaciones de DOA. De este modo, el estimador de DOA es capaz de seguir fuentes moviles sin importar si son coherentes o no y con velocidades elevadas pero bajas en relacion al ritmo de adquisicion de anspshots del procesador.

Por ultimo, sin relacion directa con deteccion de DOA, pero derivado de la forma de actuar de RCAP, se ha presentado su utilidad en el diseño de conformadores adaptados al escenario, incluso en el caso en que se requiera control de quiescent.

APENDICE III.A.1. Diseño de la matriz de focalizacion

Dados las matrices \underline{S} y \underline{S}_0 se pretende resolver el problema de encontrar una matriz \underline{T} que siendo ortonormal, minimice la distancia entre la primera matriz, una vez transformada y la segunda.

$$\begin{aligned} & \left(\left\| \underline{T} \cdot \underline{S} - \underline{S}_0 \right\|_F \right)_{MIN} \\ & \underline{T} \cdot \underline{T}^H = \underline{I} \end{aligned} \quad (A1.1)$$

Dado que la norma de Frobenius es la traza de la matriz por su transpuesta, el objetivo pasa a ser (A1.2).

$$\begin{aligned} & \text{Traza} \left[\left(\underline{T} \cdot \underline{S} - \underline{S}_0 \right) \cdot \left(\underline{S}^H \cdot \underline{T} - \underline{S}_0^H \right) \right] = \\ & = \text{Traza} \left[\underline{T} \cdot \left(\underline{S} \cdot \underline{S}^H \right) \cdot \underline{T}^H - \underline{T} \cdot \left(\underline{S} \cdot \underline{S}_0^H \right) - \left(\underline{S}_0 \cdot \underline{S}^H \right) \cdot \underline{T}^H - \left(\underline{S}_0 \cdot \underline{S}_0^H \right) \right] \end{aligned} \quad (A1.2)$$

Derivando y teniendo en cuenta la restriccion, se obtiene (A1.3) donde \underline{D} es la matriz de los multiplicadores.

$$\underline{T} \cdot \left(\underline{S} \cdot \underline{S}^H \right) - \left(\underline{S}_0 \cdot \underline{S}_0^H \right) - \underline{T} \cdot \underline{D} = \underline{0} \quad (A1.3)$$

O bien (A1.4).

$$\underline{T} \cdot (\underline{S} \cdot \underline{S}^H - \underline{D}) = (\underline{S}_0 \cdot \underline{S}^H) \quad (\text{A1.4})$$

Para encontrar la solución a esta ecuación es necesario tener presente las descomposiciones SVD de las dos matrices.

$$(\underline{S} \cdot \underline{S}^H) = \underline{U} \cdot \underline{A} \cdot \underline{U}^H \quad (\underline{S}_0 \cdot \underline{S}^H) = \underline{U}_0 \cdot \underline{B} \cdot \underline{U}_0^H \quad (\text{A1.5})$$

Al sustituir ambas en (A1.4) se obtiene (A1.6).

$$\underline{T} \cdot (\underline{U} \cdot \underline{A} \cdot \underline{U}^H - \underline{U}_0 \cdot \underline{B} \cdot \underline{U}_0^H) = \underline{U}_0 \cdot \underline{B} \cdot \underline{U}_0^H \quad (\text{A1.6})$$

Claramente la solución para la matriz y los multiplicadores son las que se expresan en (A1.7):

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \underline{U}_0 \cdot \underline{U}_0^H \\ \underline{D} &= \underline{A} - \underline{B} \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

Es decir, la transformación se deriva directamente de tan solo la segunda svd de (A1.5).

III.13. REFERENCIAS

- [1] M. A. Lagunas. "Use of the most significant lags in Iterative Spectral Estimation". IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-32, no. 2, pp. 445-448, April 1984.(*)
- [2] S.M. Kay. "Fundamentals of Statistical Signal-Processing Estimation Theory. Prentice-Halls Inc. Englewood Cliffs, N.J. , 1993, pp.102-122.
- [3] J. Krolic, M. Eizenmann. "Minimum variance spectral estimation of broad-band source location using steered covariance matrices". Proc. IEEE-ICASSP, pp. 2841-2844, N.Y. 1988.
- [4] R.O. Schmidt. " Multiple emitter location and signal parameter estimation". IEEE Trans AP, Vol. 34, pp.276-280, Mar. 1986.
- [5] J. Krolic, D.N. Swingler. " Focussed wide-band array processing by spatial resampling". IEEE Trans. ASSP, Vol. 38, no. 2, pp.365-360, Feb. 1990.
- [6] G. Vezzosi, S. Florin, B. Bouthemy. "Localisation of sources ponctuelles a large bande". XII Coloque Gretsi 89, pp. 449-452, Juan-les-Pins, Juin 1989.
- [7] M.A. Lagunas, G. Vázquez, J.F. Sitjar "Specific 2-D Spectral Estimation for wideband array beamforming" Proc. ICASS-90, IEEE-ASSP, Albuquerque, New Mexico, USA, Abril 11-16, 1990, pp. 2707-2710, CH 2847-2/90.
- [8] M.D. Ortigueira, M.A. Lagunas, "A recursive algorithm for the computation of eigenvalues and eigenvectors with application to array processing". Latvian Conference, Riga USSR pp. 22-27, Abril 1990.
- [9] M.A. Lagunas, J. Fernández "2-D spectral estimation and wideband array processing" A Latvian Conference, Riga USSR 22-27, Abril 1990.
- [10] G. Su, M. Morf. "The signal subspace approach for multiple wide-band emitter location". IEEE Trans. ASSP, Vol. 31, no.6, pp. 1502-1522, Dec. 1983.
- [11] H. Wang, M. Kaveh. "Coherent signal subspace processing for the detection and estimation of angles of arrival of multiple wide-band sources". IEEE Trans. ASSP, Vol. 33, no.4, pp. 823-831, Aug. 1985.

- [12] A. Perez-Neira, M.A.Lagunas. "High Performance DOA trackers derived from parallel low resolution detectors". IEEE-SP, Statistical Signal and Array Processing. Computer Society Press. IEEE Catalog Number 96TB100040, ISBN 0-8186-7576-4. Corfu June 1996. pp. 558-561.
- [13] A.I. Perez, J. Golberg, M.A.Lagunas. "Joint direction of arrival and array shape tracking for multiple moving targets". IEEE-SP Iccasp 97, Vol 1, pp 515-519, Munich, April 1997
- [14] M.Wax, T.Shan, T. Kailath. "Spatio-Temporal Spectral analysis by eigenstructure methods". IEEE Trans. ASSP, Vol. 32, No. 4, pp. 817-827, Aug. 1984.
- [15] G. Bienvenu. "Eigensystem properties of the sample space covariance matrix. Proc. ICASSP, pp. 332-335, Apr. 1983.
- [16] H. Hung Kaveh. "Focussing matrices for coherent signal-subspace processing". IEEE Trans. ASSP, Vol. 36, no. 8, pp 1272-1281, Aug. 1988.
- [17] H. Hung, M. Kaveh. "Coherent wideband esprit method for DOA estimation of multiple wideband sources". IEEE Trans. ASSP, Vol. 38, No. 2, Feb 1990.
- [18] R. Roy. "Esprit- Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques". Ph. D. Dissertation, Stanford Univ. CA. 1987.
- [19] Swindlehurst, B. Ottersten, R. Roy, T. Kailath. "Multiple invariance esprit" IEEE Trans. ASSP, Vol. 40, no.4, April 1992.
- [20] B. Ottersten, T. Kailath. "Direction of arrival estimation for wideband signals using Esprit algorithm". IEEE Trans. ASSP, Vol. 38, no.2, Feb. 1990.
- [21] A.Paulraj, R. Roy, T. Kailath. "A subspace rotation approach to signal parameter estimation". Proc. IEEE, pp. 1044-1045, July 1996.
- [22] M.A.Lagunas, A. Gasull. "An improved maximum likelihood method for power spectral density estimation". IEEE Trans. ASSP, Vol. 32, pp.170-172, Feb. 1984.
- [23] J. Capon. "High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis", Proc. IEEE, Vol. 57, pp.1408-1418, Aug. 1969.
- [24] S. Kay, S. Marple. "Spectrum analysis. A modern perspective". Proc. IEEE, Vol. 69, no. 11, pp. 1380-1419, Nov. 1981.
- [25] D. Jhonson. "The application of spectral estimation methods to bearing estimation problems". Proc. IEEE, Vol. 70, no. 9, Sept. 1982.
- [26] R. Kumaresan, D.W. Tufts. "Estimating the angles of arrival of multiple plane-waves". IEEE Trans. ASSP, Vol. 19, no. 1, pp.134-139, Jan. 1983.
- [27] V.F. Pisarenko. "The retrieval of harmonics from a covariance function". Geophys. J. Royal Astron. Soc., Vol. 33, pp. 347-366, 1973.
- [28] G. Bienvenu, L. Kopp. "Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach". IEEE Trans. ASSP, Vol. 31, No. 5, pp. 1235-1247, Oct. 1983.
- [29] J. Munier, G.Y. Delisle. "Spatial analysis using new properties of the cross-correlation matrix". IEEE Trans. ASSP, Vol. 39, no. 3, pp. 746-749, Mar. 1991.
- [30] S. Marcos. "Calibration of a distorted towed array using a propagation operator". JASA, Vol. 93, no. 4, pp. 1987-1994, Mar. 1993.
- [31] A.Gasull. "Estimación de ángulo de llegada en arrays de banda ancha". Tesis Doctoral, UPC 1982

- [32] M.E. Santamaria. "Estimación ML de Espectro cruzado". Tesis Doctoral UPC. 1987
- [33] A.I. Perez-Neira. "Tecnicas de Arrays para Acceso Multi-Usuario: Aplicacion de una arquitectura originada por un teorema de proyección neuronal". Tesis Doctoral UPC. Mayo 19, 1995.
- [34] M. A. Lagunas et al. "Maximum Likelihood Filters in Spectral Estimation, Signal Processing, EURASIP, "Special Issue on Major Trends in Spectral Analysis". Volume 10, No. 1, January 1986, ISSN-0165-1584, pp. 19-35.