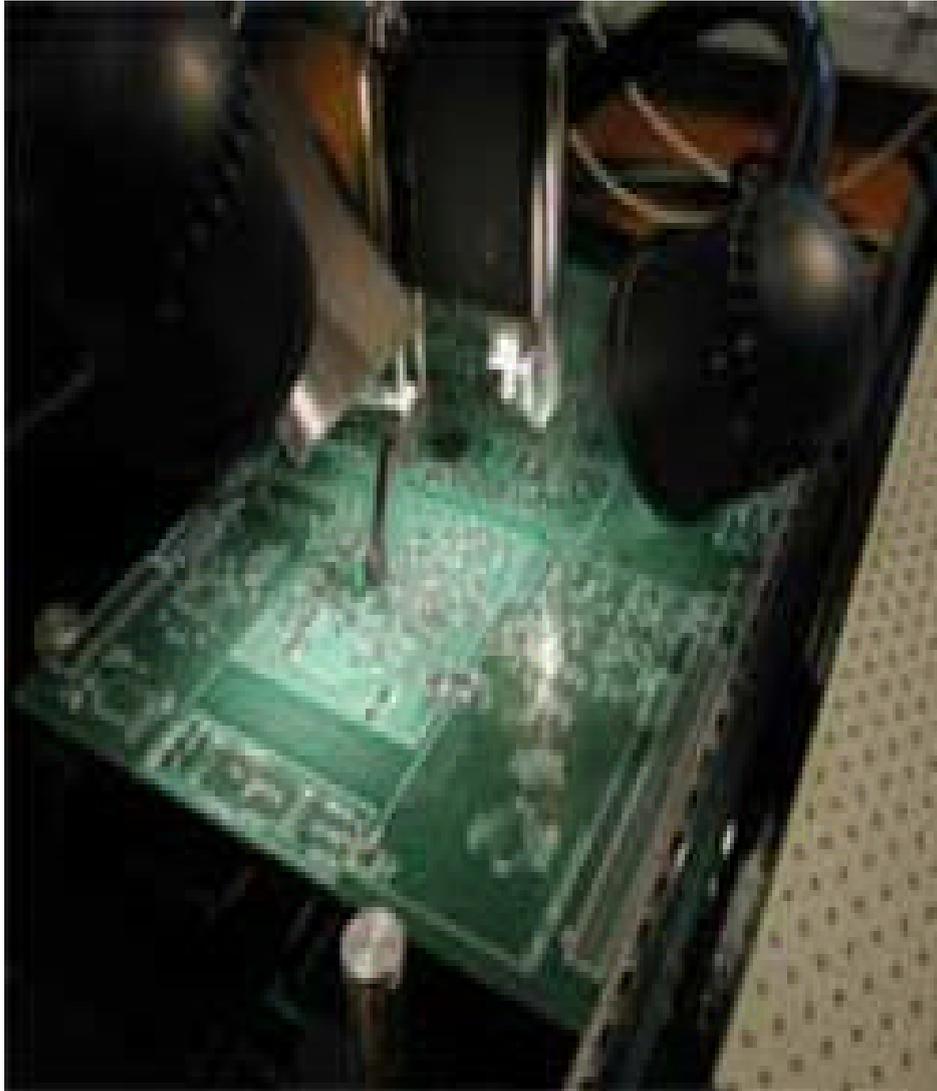


# **CAPITULO VIII: CODIGOS ESPACIO-TEMPORALES.**



**Miguel Ángel Lagunas, Ana I. Pérez-Neira**

## **CAPITULO VIII: CODIGOS ESPACIO-TEMPORALES.**

<b>VIII.1. INTRODUCCION.....</b>	<b>8.3</b>
<b>VIII.2. CODIGOS OSTBC.....</b>	<b>8.3</b>
<b>VIII.3. CODIGOS CONVOLUCIONALES:</b>	
<b>CODIGOS TRELIS O CELOSIA.....</b>	<b>8.8</b>
<b>VIII.4. CODIGOS PARA <math>R_x</math> SIN CSI.....</b>	<b>8.16</b>
<b>VIII.5. CODIGOS S-T DIFERENCIALES.....</b>	<b>8.18</b>
<b>VIII.6. EJEMPLO CODIGOS S-T DIF.....</b>	<b>8.21</b>
<b>VIII.7. RESUMEN.....</b>	<b>8.23</b>
<b>VIII.8. REFERENCIAS.....</b>	<b>8.23</b>

## VIII.1. INTRODUCCION.

Cada vez son menores las distancias que separan el procesado lineal en sistemas de comunicaciones de sus homónimos no-lineales y mas conocidos como sistemas de codificación. En lo que sigue se explotara al máximo las similitudes existentes para, tomando como punto de partida el procesado lineal hasta ahora expuesto, describir formalmente el diseño, utilización y prestaciones de sistemas de codificación espacio temporal.

La utilidad de las matrices ortonormales, descritas varias veces y recientemente en el capitulo anterior, dedicado a la detección MSE se convertirán en la herramienta mas empleada en el diseño de códigos.

Cualquier sistema de codificación, en cierto modo, alude a la ausencia de CSI o información de canal. Por esta razón, el lector encontrara las similitudes formales de lo que se expondrá en los sistemas vistos hasta el momento para el caso en donde el transmisor desconoce completamente el estado del canal. De hecho la noción de tasa de error promedio, expuesta en el capitulo anterior se convertirá en el parámetro básico de evaluación de la calidad de un codificador espacio-tiempo.

Se comenzara la exposición con el sistema más sencillo o mejor relación calidad complejidad que son los denominados códigos bloque ortogonales (OSTBC). A diferencia del resto los OSTBC permiten la detección instantánea de los símbolos recibidos con una complejidad mínima en el receptor. Se expondrán dos formulaciones diferentes de ambos; una de ellas especifica de OSTBC mientras que la otra los conecta directamente con códigos bloque y convolucionales.

La exposición seguirá con la versión de códigos convolucionales para MIMO, también conocidos como “trellis codes”. Sin duda la mejor alternativa cuando la calidad es el problema y se esta dispuesto a asumir la complejidad en la decodificación. Por ultimo, se expondrán los sistemas diferenciales al ser la única alternativa eficiente cuando tampoco se dispone de CSI en el receptor.

## VIII.2. CODIGOS OSTBC.

Retomando el sistema de transmisión de un solo símbolo  $s_1(n)$  sobre un canal MIMO y el diseño correspondiente para el caso de ausencia de CSI, el lector recordara que la matriz de proceso tenia que verificar la ortogonalidad, tal y como se escribe en (8.1), que no era mas que el principio de red de solo fase en procesado lineal o una distribución uniforme de potencia en todos los ejes disponibles de diversidad.

$$\underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}^H = \underline{\underline{I}}_{n_r} \quad (8.1)$$

Con este proceso en el transmisor, el receptor ML venia a ser directamente el operador traza sobre el proceso adaptado al transmisor. Es decir si (8.2.a) era la señal transmitida, entonces (8.2.b) era la expresión que tomaba el detector ML para el símbolo transmitido.

$$\underline{\underline{X}}_{T,n} = \underline{\underline{B}}.s_1(n) \quad (8.2.a)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{X}}_{R,n} &= \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{X}}_{T,n} + \underline{\underline{W}}_n \\ s\hat{1} &= \text{Traza} \left[ \underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right] \end{aligned} \quad (8.2.b)$$

Es importante resaltar, crucial, que la estimación del símbolo transmitido directamente de la traza es solo valido si se trata de símbolos BPSK o QPSK. En el resto de los casos este detector no es óptimo. A pesar de que muchos autores lo dan por supuesto es por lo que aquí se insiste de nuevo, ya que como el lector recordara en el capítulo segundo este tema se aclaro probando que el detector ML solo coincide con (8.2.b) para estas dos constelaciones. No obstante ha de recordarse que el que el detector no sea óptimo no impide su empleo a costa de reducir calidad.

Aun en el caso de usar cualquier constelación, es claro que la estadística de cualquier detector ha de ser la traza que aparece en el segundo término de (8.2.b) y en ella centraremos la atención.

Volviendo a la condición (8.1), es obvio que existen muchas matrices que verifican esta condición. De hecho, en el capítulo anterior se evidencio como el uso de fasores como entrada de matrices de cualquier dimensión podía conseguir esta propiedad, siempre que el numero de accesos al canal fuese mayor o igual que el numero de antenas transmisoras. Sin pérdida de generalidad, se concentrara la presentación en códigos de la menor redundancia posible, es decir, número de accesos al canal igual al número de antenas transmisoras. Dicho de otro modo, la matriz (8.2.a) será una matriz cuadrada.

Continuando con las posibilidades de diseño de la matriz del transmisor con la única condición de que sea ortogonal, existen múltiples posibilidades. Las mas interesantes en este apartado serán aquellas que tienen en sus entradas cero, uno o menos uno, con lo que convertiremos un sistema de procesado lineal en un código. A nivel de ejemplo, el lector puede observar en (8.3) y para el caso de dos antenas transmisoras, la cantidad de opciones disponibles de matrices cuyo producto (8.1) es la identidad.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dots \end{aligned} \quad (8.3)$$

La cuestión es que si todas estas matrices son validas hasta que punto se podrían usar simultáneamente más de una. La motivación para este argumento es que, al emplear dos accesos al canal y un solo símbolo real, el sistema seria de muy baja velocidad. La posibilidad de emplear más de una matriz permitiría incrementar la velocidad del sistema de transmisión.

Si se transmiten dos símbolos reales  $s_1$  y  $s_2$  con dos matrices diferentes, la señal transmitida seria (8.4).

$$\underline{\underline{X}}_T = \underline{\underline{B}}_1 \cdot s_1 + \underline{\underline{B}}_2 \cdot s_2 \quad (8.4)$$

Esta señal, al pasar por el canal MIMO y proceder a la detección de uno de los dos símbolos, digamos  $s_1$ , daría lugar a una componente deseada en la salida del detector y una interferencia de otro símbolo, además del ruido del receptor.

$$\hat{s}_1 = \underset{\text{deseada}}{\text{Traza}} \left[ \underline{\underline{B}}_1^H \cdot \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{H}}} \cdot \underline{\underline{B}}_1 \right] \cdot s_1 + \underset{\text{ISI}}{\text{Traza}} \left[ \underline{\underline{B}}_1^H \cdot \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{H}}} \cdot \underline{\underline{B}}_2 \right] \cdot s_2 \quad (8.5)$$

Es claro que el criterio de no distorsión de la deseada conlleva la ortonormalidad de las dos matrices empleadas, es decir:

$$\underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H = \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{\underline{B}}_2^H = \underline{\underline{I}}_{\underline{\underline{n}}_r} \quad (8.6)$$

Sin embargo, para conseguir suprimir ISI la condición aparece, en principio, mas complicada. Claramente, usando la propiedad de circularidad de la traza, la solución para no ISI sería que las dos matrices fueran ortogonales.

$$\text{Traza} \left[ \underline{\underline{B}}_1^H \cdot \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{H}}} \cdot \underline{\underline{B}}_2 \right] = \text{Traza} \left[ \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{H}}} \cdot \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H \right] = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H = \underline{\underline{0}}? \quad (8.7)$$

Esta condición para una matriz cuadrada como las que se utilizan no es posible, con lo que parece que no existe otra opción que enviar un solo símbolo. La solución viene de considerar el problema a resolver mas a fondo como se vera a continuación.

Dado que el término de ISI será, en general, complejo, se escribirá dicho complejo como en (8.8).

$$\text{Traza} \left[ \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{H}}} \cdot \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H \right] = \mathbf{a} + j \cdot \mathbf{b} \quad (8.8)$$

Dado que la matriz de canal es hermética, entonces el conjugado de la expresión anterior será (8.9).

$$\text{Traza} \left[ \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{H}}} \cdot \underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{\underline{B}}_2^H \right] = \mathbf{a} - j \cdot \mathbf{b} \quad (8.9)$$

Si deseamos que la parte real del termino de ISI sea cero, para así poder detectar el símbolo  $s_1$  correctamente sin ISI, es necesario que (8.8) sea igual a (8.9) cambiada de signo. Con esta condición resulta que las matrices elegidas requieren verificar una condición mucho más fácil o relajada y que se escribe en (8.10).

$$\underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{\underline{B}}_2^H = -\underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H \quad (8.10)$$

Si esta condición se verifica, la obtención de los dos símbolos transmitidos sería sencillamente:

$$\begin{aligned}\hat{s}_1 &= \text{Re}\left(\text{Traza}\left[\underline{\underline{B}}_1^H \cdot \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{H}}} \cdot \underline{\underline{X}}_{\underline{\underline{R}}}\right]\right) \\ \hat{s}_2 &= \text{Re}\left(\text{Traza}\left[\underline{\underline{B}}_2^H \cdot \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{H}}} \cdot \underline{\underline{X}}_{\underline{\underline{R}}}\right]\right)\end{aligned}\quad (8.11)$$

La condición (8.10) tiene un nombre en inglés que es el de matrices “amigable” o amigables es decir establecen su vínculo de una forma mas amigable que la mera e imposible ortogonalidad. A nivel de ejemplo, puede verse en (8.12) una posible selección de dos matrices amigables para la transmisión y recepción simultanea sin ISI de dos símbolos reales.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{B}}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{B}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{X}}_{\underline{\underline{T}}} &= \underline{\underline{B}}_1 \cdot s_1 + \underline{\underline{B}}_2 \cdot s_2 = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (8.12)$$

La cuestión ahora es si aun se pueden multiplexar más símbolos, manteniendo el detector como optimo. En concreto el detector se mantendría también si se tratase de símbolos QPSK, así pues, la pregunta se materializa en la posibilidad de incluir dos stream mas pero ahora sobre la parte imaginaria de la señal transmitida.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{B}}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{B}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \underline{\underline{B}}_3 &= \underline{\underline{B}}_4 \\ \underline{\underline{X}}_{\underline{\underline{T}}} &= \underline{\underline{B}}_1 \cdot s_1 + \underline{\underline{B}}_2 \cdot s_2 + j \cdot \underline{\underline{B}}_3 \cdot s_3 + j \cdot \underline{\underline{B}}_4 \cdot s_4\end{aligned}\quad (8.13)$$

Estos dos símbolos se detectarían tomando la parte imaginaria del detector de traza correspondiente. Para que estos símbolos no interfieran con los anteriores de la parte real se requeriría (8.14).

$$\text{Re}\left(\text{Traza}\left[\underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{H}}} \cdot j \cdot \underline{\underline{B}}_3 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H\right]\right) = \text{Im}\left(\text{Traza}\left[\underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{H}}} \cdot \underline{\underline{B}}_3 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H\right]\right) = 0 \quad (8.14)$$

Para ello basta exigir que las matrices sean amigables pero sin el cambio de signo.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{\underline{B}}_3^H &= \underline{\underline{B}}_3 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H \\ \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{\underline{B}}_4^H &= \underline{\underline{B}}_4 \cdot \underline{\underline{B}}_2^H\end{aligned}\quad (8.15)$$

A su vez para no interferirse entre ellos, los dos nuevos símbolos requieren también que sus matrices sean amigable con signo menos. En definitiva, (8.16) reúne todas las propiedades juntas de las cuatro matrices.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H &= \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{\underline{B}}_2^H = \underline{\underline{B}}_3 \cdot \underline{\underline{B}}_3^H = \underline{\underline{B}}_4 \cdot \underline{\underline{B}}_4^H = \underline{\underline{I}}_{\underline{\underline{2}}} \\ \underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{\underline{B}}_2^H &= -\underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H & \underline{\underline{B}}_4 \cdot \underline{\underline{B}}_3^H &= -\underline{\underline{B}}_3 \cdot \underline{\underline{B}}_4^H \\ \underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{\underline{B}}_3^H &= \underline{\underline{B}}_3 \cdot \underline{\underline{B}}_1^H & \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{\underline{B}}_4^H &= \underline{\underline{B}}_4 \cdot \underline{\underline{B}}_2^H\end{aligned}\quad (8.16)$$

Los cuatro streams se recuperarían sobre parte real/imaginaria de la salida del detector a cada símbolo.

$$\begin{aligned}
 \hat{s}_1 &= \text{Re}\left(\text{Traza}\left[\underline{\underline{B}}_1^H \cdot \underline{\underline{R}}_H \cdot \underline{\underline{X}}_R\right]\right) \\
 \hat{s}_2 &= \text{Re}\left(\text{Traza}\left[\underline{\underline{B}}_2^H \cdot \underline{\underline{R}}_H \cdot \underline{\underline{X}}_R\right]\right) \\
 \hat{s}_3 &= \text{Im}\left(\text{Traza}\left[\underline{\underline{B}}_1^H \cdot \underline{\underline{R}}_H \cdot \underline{\underline{X}}_R\right]\right) \\
 \hat{s}_4 &= \text{Im}\left(\text{Traza}\left[\underline{\underline{B}}_1^H \cdot \underline{\underline{R}}_H \cdot \underline{\underline{X}}_R\right]\right)
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

Un ejemplo de selección de matrices para un esquema de dos antenas transmisoras es el que sigue:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{B}}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \underline{\underline{X}}_T &= \underline{\underline{B}}_1 \cdot s_1 + \underline{\underline{B}}_2 \cdot s_2 + \underline{\underline{B}}_3 \cdot j \cdot s_3 + \underline{\underline{B}}_4 \cdot j \cdot s_4 = \begin{pmatrix} s_1 + j \cdot s_3 & -s_2 + j \cdot s_4 \\ s_2 + j \cdot s_4 & s_1 - j \cdot s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

Este OSTBC para dos antenas es conocido popularmente por el nombre de su autor o código de Alamouti y en el capítulo anterior apareció con una formulación diferente en el contexto de detección ML. Lo que caracteriza a un OSTBC es su fácil detección ML que no requiere búsqueda sobre la constelación. De hecho es de destacar que aunque el detector es solo óptimo para símbolos QPSK, la sencillez del detector hace que se use también en el caso de emplear símbolos M-QAM.

El interés de los códigos OSTBC es que permiten la transmisión simultánea de varios símbolos en un número de accesos al canal igual al número de antenas transmisoras con un detector sencillo y siendo fair pues todos los símbolos se detectan con una SNR igual y una ganancia, sobre un canal sin diversidad, igual a la traza de la matriz de canal y, por supuesto, sin requerir CSI en el transmisor.

Si lo anterior es una buena noticia para sistemas radio, el disponer de un OSTBC que transmite dos símbolos complejos en dos accesos, la mala noticia es que no existen matrices amigables para disponer de OSTBCs para sistemas con más de dos antenas y que sean full "rate", es decir, que transmitan simultáneamente  $n_T$  símbolos complejos en el mismo número de accesos. No obstante, para sistemas que no sean "full-rate" si que existen matrices amigables para formar el código. A nivel de ejemplo, (8.19) muestra un OSTBC para cuatro antenas con "rate"  $\frac{3}{4}$ .

$$\begin{bmatrix} s_1 & 0 & s_2 & -s_3 \\ 0 & s_1 & s_3^* & s_2^* \\ -s_2^* & -s_3 & s_1^* & 0 \\ s_3^* & -s_2 & 0 & s_1^* \end{bmatrix} \tag{8.19}$$

A la vista de este código viene la tentación de incluir un cuarto símbolo en los huecos que existen en esta última matriz. El lector puede comprobar que entonces el sistema tendría ISI y habría de renunciar a la sencillez del detector de traza.

### VIII.3. CODIGOS CONVOLUCIONALES: TRELIS CODES.

Como se ha visto en el capítulo anterior y en este, en el caso de los OSTBC, los streams a transmitir acceden al canal en varias ocasiones. En concreto, en un OSTBC cada símbolo accede al canal un número de veces no inferior al número de antenas transmisoras. Un planteamiento de mero procesamiento de señal identificaría lo realizado hasta ahora con un sistema FIR donde cada muestra permanece viva en el filtro durante un intervalo igual a su longitud. Obviamente la alternativa sería considerar el caso IIR, es decir, incluir una recursión que sea la que determine los accesos que cada símbolo realiza al canal. En el caso de que esta recursión se realizase sobre una aritmética finita estaríamos ante un código mal denominado convolucional. Se verá a continuación como, con esta perspectiva pueden realizarse códigos convolucionales para diversidad espacio-temporal.

El codificador tendrá, al igual que en un filtro IIR, dos partes diferenciadas. Una parte corresponderá a los símbolos de entrada y la otra a la memoria del sistema. Si se considera que el codificador admite  $R$  símbolos  $a(1), a(2), \dots, a(R)$ , todos ellos agrupados en el vector  $\underline{a}$ , el codificador produce una salida con un vector de símbolos  $\underline{x}$  que dependerá tanto de los símbolos de la entrada como de su memoria que la denominaremos estado y se denotará con el vector  $\underline{b}$ . La formulación es similar a la ecuación de medida de un modelo de Gauss.

$$\underline{x} = \left[ \underline{G}_1 \cdot \underline{a} + \underline{G}_2 \cdot \underline{b} \right]^{\square} \quad (8.20)$$

Donde  $[\cdot]^{\square}$  denota que el resultado se lleva, en cada componente del vector  $\underline{x}$  al dominio de los enteros de 0 a, digamos,  $2^L - 1$ . Es decir se producen  $L$  bits en cada componente del vector que son los que determinan que punto de la constelación va a transmitir la antena correspondiente. Por ejemplo, en un sistema de 2 bits/Hz la constelación será QPSK las componentes del vector  $\underline{x}$  tomarán un valor de los cuatro posibles (0, 1, 2 y 3). Dependiendo de este valor la antena correspondiente emitirá 1,  $j$ ,  $-1$  y  $-j$  respectivamente. De este modo, obsérvese que el “rate” del codificador espacio-temporal será (8.21).

$$Rate = \frac{R}{L} \text{ sobre } n_r \text{ antenas} \quad (8.21)$$

La ecuación que completa el codificador es la que refleja la evolución del estado. Esta ecuación, también similar a la ecuación de estado de un modelo de Gauss, toma la forma de (8.22).

$$\underline{b} = \left[ \underline{G}_3 \cdot \underline{a} + \underline{G}_4 \cdot \underline{b} \right]^{\oplus} \quad (8.22)$$

Donde  $[\cdot]^{\oplus}$  denota que la operación se realiza en  $2^k$  niveles. El tamaño o número de componentes del vector de estado  $M$  determina en gran manera la complejidad del detector pues fija el tamaño de la trellis que el detector ML ha de seguir.

En definitiva, al margen de las matrices empleadas en las dos ecuaciones del codificador, puede verse que los parámetros que le caracterizan son los siguientes:

- Numero de antenas para las que esta diseñado  $n_T$ .
- Bits/Hz o tamaño de la constelación empleada ( $L$  bits)
- Complejidad o número de estados  $2^{K.M}$ .
- “rate” o cociente entre los símbolos de entrada y  $L$ .

así, por ejemplo, un código con la siguiente etiqueta st2bh2est4rate1 indicara un código para dos antenas, con 2 bits/Hz o QPSK de constelación para cada antena, 4 estados posibles y admite dos bits de entrada. Sin perdida de generalidad, en lo que sigue, se limitara la presentación al caso binario, es decir,  $K$  igual a la unidad.

La Figura (8.1) resume el esquema de un codificador como los descritos hasta ahora.

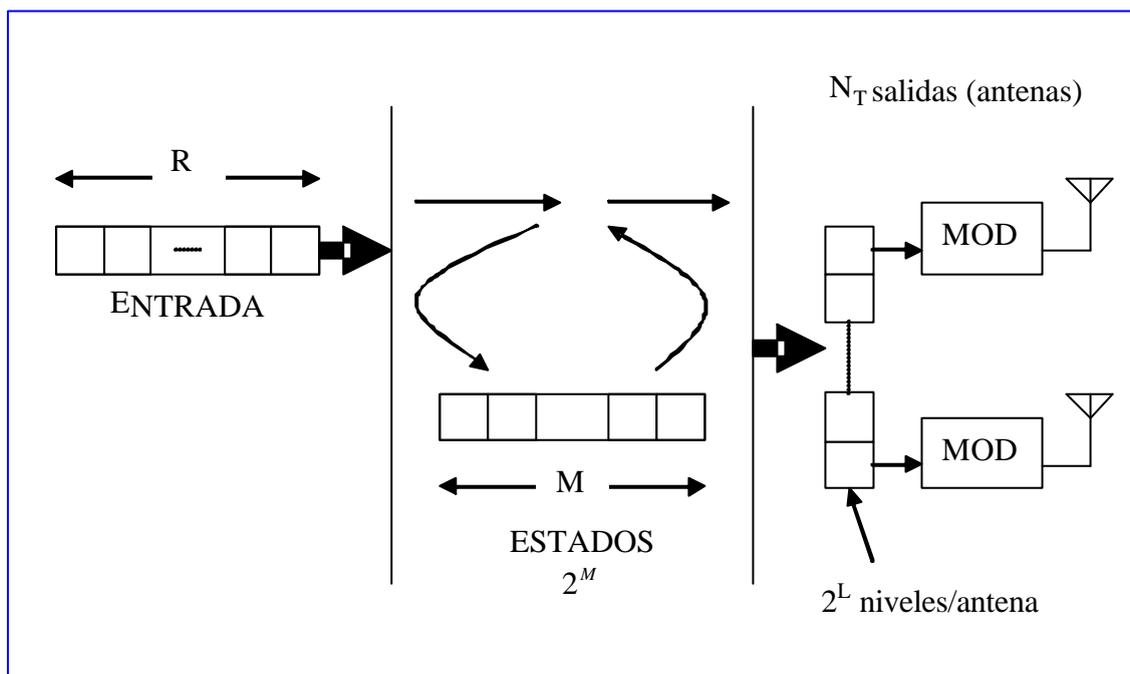


Figura 8.1. Esquema de un codificador Trellis con sus parámetros más relevantes.

Al margen de la formulación general, que presenta un gran número de grados de libertad, existe una manera más compacta y sencilla de implementar un codificador Trellis. Básicamente, en lo que se refiere a la ecuación de medida, esta se realiza de manera compacta agrupando entrada y estado en un solo vector.

$$\underline{c} = [a(1) \quad \dots \quad a(R) \quad b(1) \quad \dots \quad b(M)] \quad (8.23)$$



en celosía para el código anterior sería el de la Figura (8.2). De una manera mas resumida y como suele aparecer en la literatura, la Figura 8.3 resume el código usado como ejemplo.

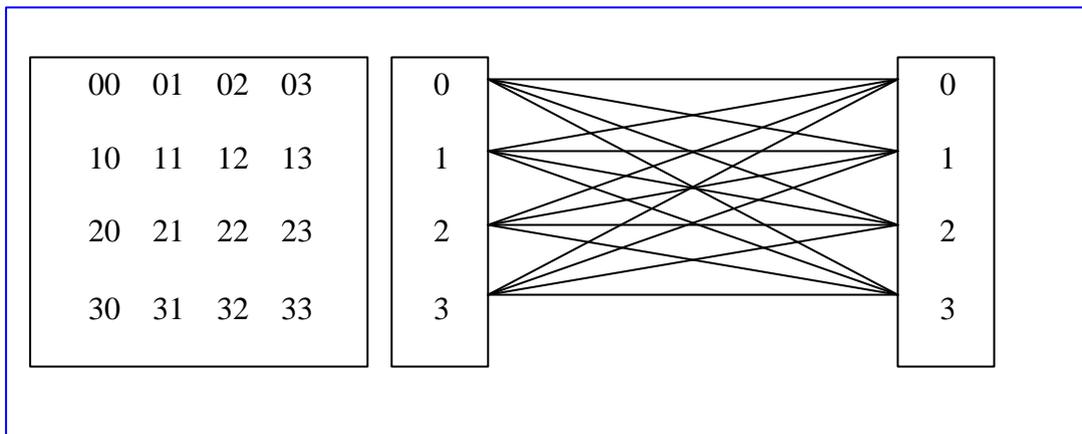


Figura 8.3 Representación diagrama en celosía. El cuadro de la izquierda representa los índices de las señales transmitidas por cada nodo a las entradas en orden

Relativo al paso de índices a señal transmitida, la Figura 8.4 lo aclara con un ejemplo.

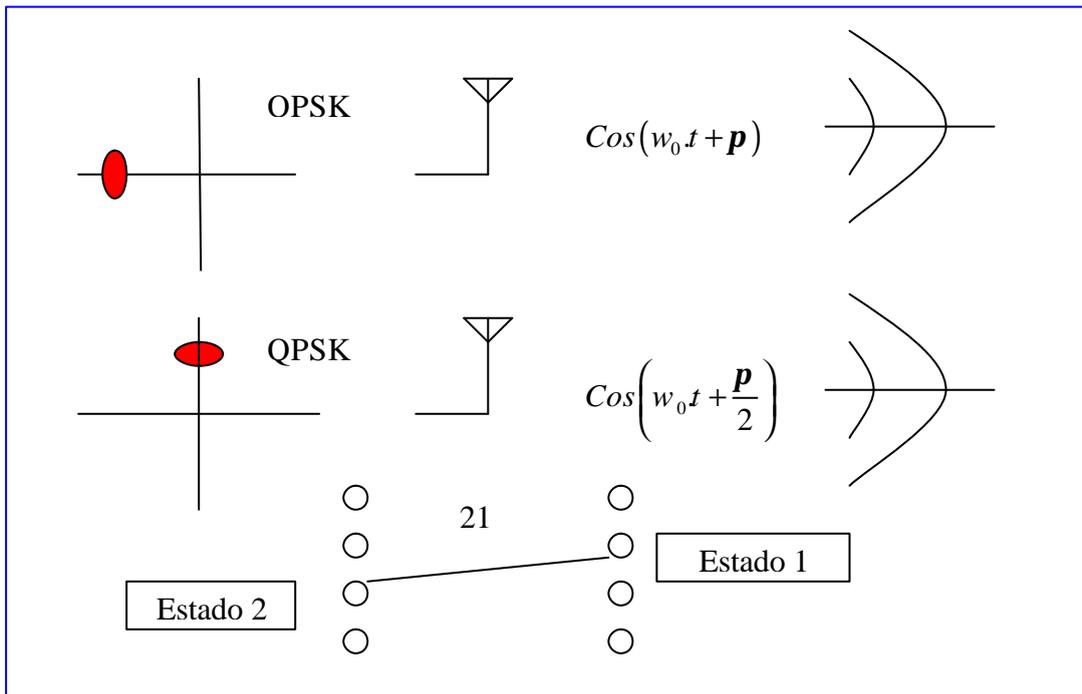


Figura 8.4. Ejemplo de transición del estado 2 al estado 1. Los índices de esta transición son 2 para la antena 1 y 1 para la antena 2. Se indica la forma de onda emitida para dichos índices.

Dado que el transmisor no realiza otro proceso que la emisión directa de las señales, el análisis de cómo funciona el receptor será sencillo. Básicamente el receptor ha de computar la verosimilitud de todos los caminos posibles entre un punto de partida

y un punto de llegada. Este último puede determinarse en base al retardo de descodificación. El receptor es suboptimo pero la complejidad queda acotada. Imagínese que se determina que el retardo de descodificación se determina en cuatro accesos por ejemplo. El detector ha de computar todos los posibles caminos que, desde el estado de partida llegan a cuatro accesos mas tarde. Este caso se representa en la Figura 8.5. Imagínese que la secuencia transmitida obedece al camino marcado en traza gruesa, si otro camino, por ejemplo el de línea discontinua presenta una verosimilitud mayor se producirá un error.

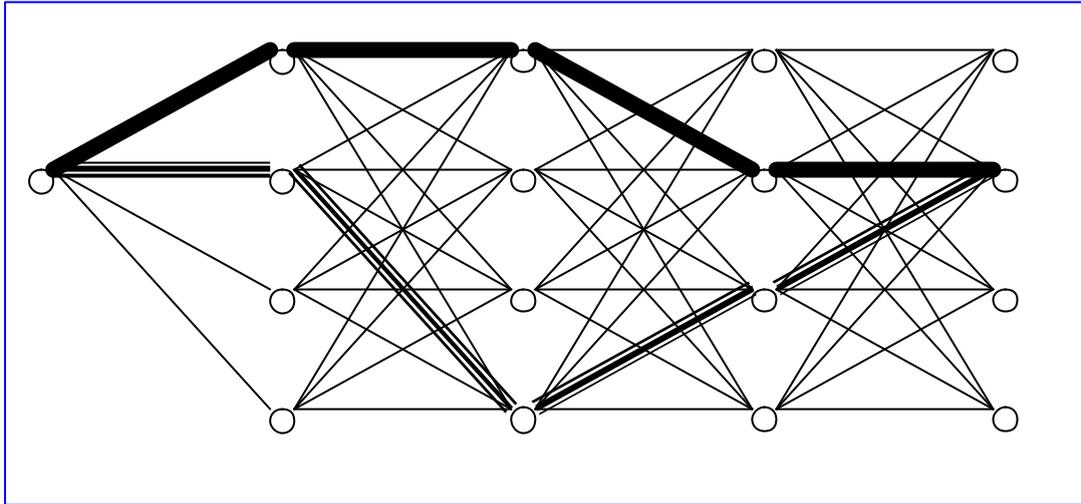


Figura 8.5. Evolución del camino correcto y de un camino erróneo sobre la celosía en un decodificador de retardo 4 accesos.

Si se denomina como  $\underline{s}_n$  a las formas de onda emitidas correctamente y  $\underline{b}_n$  a las que tendrían que haberse transmitido si el detector no estuviese en error, es claro que la probabilidad de error tendría la expresión (8.26), como pudo verse en el capítulo anterior. En esta expresión  $N$  es el número de accesos sobre los que se basa la decisión.

$$\Pr(\underline{s}_n \Rightarrow \underline{b}_n; n=1, N) = Q\left(\sqrt{\left(\frac{E_s}{2 \cdot N_0}\right) \cdot \text{Traza}(\underline{R}_H \cdot \underline{A})}\right) \quad (8.26)$$

A su vez, la matriz  $\underline{A}$ , al no existir un proceso directamente antes de la transmisión, será directamente, de nuevo ver capítulo anterior, (8.27).

$$\underline{A} = \sum_{n=1}^N (\underline{s}_n - \underline{b}_n) \cdot (\underline{s}_n - \underline{b}_n)^H \quad (8.27)$$

Obviamente sobre esta expresión pueden usarse los mismo razonamientos y forma de proceder aplicados o usados en el capítulo anterior.

Aunque poco formal, la manera en que se han diseñado los códigos de este tipo se han basado en la probabilidad de error promedio. En concreto de la expresión de dicha tasa de error se realiza la aproximación de buena SNR por lo que la formula original se reduce a una expresión mas sencilla, tal y como se indica en (8.28).

$$\Pr(\underline{L}_0 \Rightarrow \underline{L}_e) \approx k_1 \cdot \prod_{p=1}^{n_R} \frac{1}{\det \left[ \underline{I}_{n_r} + \frac{2E_S}{N_0} \cdot \underline{A} \cdot \underline{\Sigma}_p \right]} \approx \left| \begin{array}{l} \text{Para relaciones} \\ \text{señal a ruido} \\ \text{elevadas} \end{array} \right| \approx \quad (8.28)$$

$$\approx k_1 \cdot \left( \frac{2E_S}{N_0} \right)^{-n_R \cdot n_r} \cdot \prod_{p=1}^{n_R} \frac{1}{\det \left[ \underline{A} \cdot \underline{\Sigma}_p \right]}$$

Aun mas, considerando el canal unitario, la probabilidad de error queda en función únicamente del determinante de la matriz de error, como se puede ver en (8.29).

$$\Pr(\underline{L}_0 \Rightarrow \underline{L}_e) \approx k_1 \cdot \left( \frac{2E_S}{N_0} \right)^{-n_R \cdot n_r} \cdot \prod_{p=1}^{n_R} \frac{1}{\det \left[ \underline{A} \cdot \underline{\Sigma}_p \right]} \approx k_2 \cdot \left( \frac{2E_S}{N_0} \right)^{-n_R \cdot n_r} \cdot (\det(\underline{A}))^{-n_R} \quad (8.29)$$

Este criterio, denominado del determinante y debido a Calderbank, reduce el diseño de la matriz de código a aquella que maximiza el peor determinante. Dicho de otro modo, sobre todos los pares de caminos posibles se busca el de menor determinante y se maximiza este sobre la matriz de código en (8.24). Obviamente esta búsqueda exhaustiva es impracticable y se puede reducir en gran manera si el código es uniforme, es decir, si el diseño se puede hacer tomando de base una secuencia cualquiera. Es interesante destacar que, aunque la condición parece matemáticamente complicada, basta observar el diagrama en celosía del código y verificar que cambiando el orden de los nodos o estados de mayor a menor, en lugar de su forma habitual de menor 00 a mayor, este no cambia. Si el código es uniforme, la secuencia de referencia puede ser cualquiera y se toma por sencillez la derivada de una entrada de todo ceros, es decir, las ramas superiores. Una vez tomada la secuencia de referencia ha de buscarse la peor en términos del determinante. Dicha búsqueda es sencilla pues basta encontrar la secuencia que con menor determinante, parte del mismo estado cero y llega por un camino diferente al estado cero. Una vez encontrado el peor determinante, la ganancia de código vendrá dada por (8.30), que es igual a la media geométrica de los autovalores diferentes de cero de la matriz de error. Es claro, que maximizar esta ganancia pasa por conseguir que sea de rango completo, es decir que  $r$  sea igual al número de antenas transmisoras.

$$\text{Ganancia} = \left[ \det(\underline{A})_{\text{mayor}} \right]^{-r} \quad (8.30)$$

Veamos un ejemplo con el código st2bh1est2rate0.5. El código óptimo, encontrado por búsqueda directa, tiene la matriz (8.31) y su implementación aparece en la Figura 8.6.

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

Su diagrama de trellis es sencillo y aparece en la misma figura.

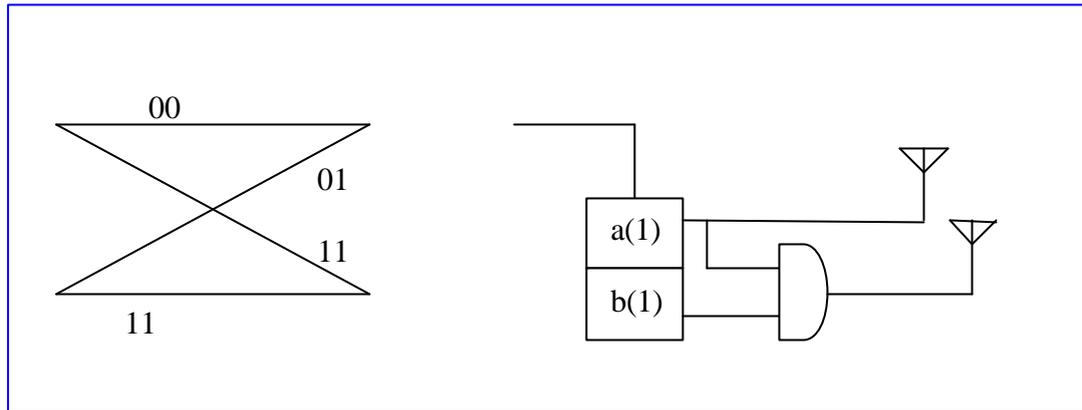


Figura 8.6. celosía y realización del código st2bh1est2rate0.5.

La búsqueda de la secuencia mas próxima (determinante mínimo) que partiendo del estado cero vuelve a este es de dos accesos y se trata de la señales de índices 11/01 sobre BPSK al ser un código de 1 bit/Hz/seg. La Figura 8.7 visualiza la secuencia de referencia que señaliza con 00/00 y la más próxima 11/01.

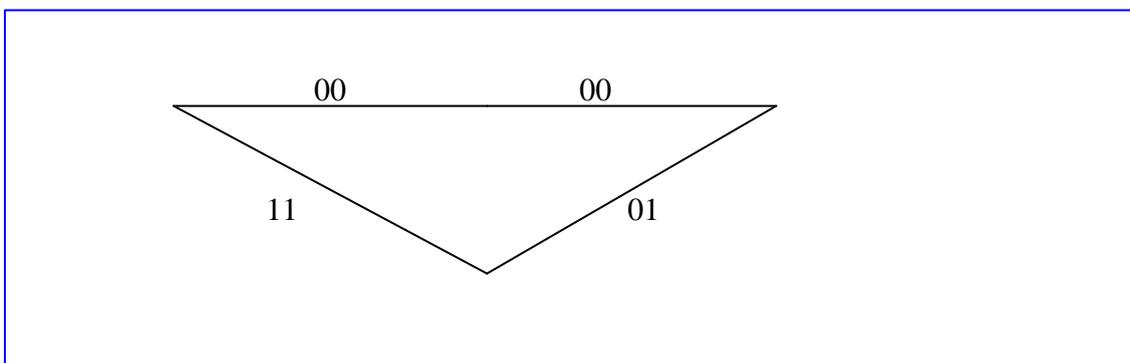


Figura 8.7. Secuencia correcta y secuencia “mas próxima” sobre el diagrama trellis del código de la figura anterior.

Para calcular el determinante ha de recordarse que en BPSK el cero señaliza +1 y el 1 señaliza -1 (no cambia el resultado si altera esta asignación). De este modo, los vectores de error en los dos accesos son:

$$\underline{s}_1 - \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{s}_2 - \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

Con lo que la matriz de error peor y la ganancia del código serán:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [2 \quad 2] + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 2] = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = 16 \quad \text{Ganancia} = \sqrt{16} = 4$$

En relación a esta expresión, al margen de que el origen del criterio del determinante no es formal y en el capítulo anterior pueden encontrarse mejores formas

de proceder, existen otras críticas u objeciones. La primera es que lo importante no es tan solo cual es el peor camino sino que, en códigos mas complicados que el del ejemplo, la probabilidad de error que muestra el código difiere también dependiendo de la probabilidad de que ese camino elegido en el calculo de la ganancia sea muy alta o muy baja. Una mala ganancia que provenga de un camino poco probable no impactara seriamente la calidad del sistema con una ganancia moderada que es muy probable.

Como se ha indicado, un estudio mas formal de estos códigos debería realizarse en las líneas apuntadas en el capitulo anterior, tanto en lo que se refiere a diseño instantáneo como estadístico.

A continuación, basado estrictamente en el criterio del determinante y tomando este como la ganancia del código, elevado a menos el numero de antenas transmisoras, se listan los códigos trellis mas utilizados.

St2bh2est8	Ganancia 2	$\underline{\underline{G}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
St2bh2est16	Ganancia $\sqrt{32}$	$\underline{\underline{G}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
St2bh1est2	Ganancia 4	$\underline{\underline{G}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
St2bh1est4	Ganancia $\sqrt{48}$	$\underline{\underline{G}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
St2bh1est8	Ganancia $\sqrt{80}$	$\underline{\underline{G}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
St2bh1est16	Ganancia $\sqrt{128}$	$\underline{\underline{G}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
St3bh1est8	Ganancia $\sqrt[3]{256}$	$\underline{\underline{G}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

El apartado que sigue, a diferencia de los anteriores, aborda el problema del diseño del sistema cuando tampoco el receptor dispone de CSI. Una situación habitual cuando el canal radio presenta una gran variabilidad haciendo inviable cualquier técnica de estimación del canal por parte del receptor y, desde luego, inútil su paso al lado del transmisor.

#### VIII.4. CODIGOS PARA Rx SIN CSI.

En el caso en que el receptor no dispone de CSI, aun se puede realizar la transmisión usando códigos espacio temporales. Supóngase que el alfabeto de las matrices código se designa según (8.34) con lo que se codifican  $\log_2 M$  bits por cada N accesos que, sin limitar el carácter general de la presentación se supondrán igual al número de antenas transmisoras.

$$\underline{\underline{C}}_m \quad m=1, M \quad (8.34)$$

Imponiéndose la condición de ortogonalidad de forma que cualquiera de las palabras código verifica (8.35).

$$\underline{\underline{C}}_m \cdot \underline{\underline{C}}_m^H = \underline{\underline{I}}_{n_r} \quad \forall m=1, M \quad (8.35)$$

La señal recibida será (8.36).

$$\underline{\underline{Y}}_R = \left( \frac{2E_s}{N_0} \right) \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{C}}_0 + \underline{\underline{W}} = \mathbf{r} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{C}}_0 + \underline{\underline{W}} \quad (8.36)$$

Bajo la condición de canal desconocido, la matriz recibida tiene una distribución gaussiana de media nula y matriz de covarianza dada por (8.37). Nótese que la formulación de la covarianza, transpuesta por directa en lugar de la contraria, obedece a poder tomar el valor esperado del canal que se ha supuesto Rayleigh.

$$\underline{\underline{\Sigma}} = E \left[ \underline{\underline{Y}}_R^H \underline{\underline{Y}}_R \right] = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{C}}_0^H \cdot E \left[ \underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{H}} \right] \cdot \underline{\underline{C}}_0 = \underline{\underline{I}} + \mathbf{r} \cdot \underline{\underline{C}}_0^H \cdot \underline{\underline{R}}_{HA} \cdot \underline{\underline{C}}_0 = \underline{\underline{I}} + \mathbf{r} |H_0|^2 \cdot \underline{\underline{C}}_0^H \cdot \underline{\underline{C}}_0 \quad (8.37)$$

Es mas, dicha matriz de canal es lógico de suponer que presente una estructura diagonal en todos sus términos, con lo que definiendo una nueva  $\mathbf{r}$ , la formulación de esta queda mucho mas compacta y dependiendo fundamentalmente de la palabra código. La probabilidad de la señal recibida viene dada por (8.38.a) que, después de usar el lema de la inversa sobre la covarianza y teniendo presente la condición de ortogonalidad de las palabras código (ver (8.35)) permite escribir el detector optimo.

$$\begin{aligned} \Pr \left( \underline{\underline{Y}}_R / \underline{\underline{C}}_0 \right) &= k_0 \cdot \exp - \left[ \text{Traza} \left( \underline{\underline{Y}}_R \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} \cdot \underline{\underline{Y}}_R^H \right) \right] = \\ &= k_0 \cdot \exp - \left[ \text{Traza} \left( \underline{\underline{Y}}_R \cdot \left( \underline{\underline{I}} + \mathbf{r} \cdot \underline{\underline{C}}_0^H \cdot \underline{\underline{C}}_0 \right) \cdot \underline{\underline{Y}}_R^H \right) \right] \end{aligned} \quad (8.38.a)$$

$$\hat{m} = \underset{\underline{\underline{C}}_m, m=1, M}{\text{argmax}} \left[ \text{Traza} \left( \underline{\underline{Y}}_R \cdot \underline{\underline{C}}_m^H \cdot \underline{\underline{C}}_m \cdot \underline{\underline{Y}}_R^H \right) \right] \quad (8.38.b)$$

El detector de (8.38.b) es el receptor óptimo para el caso de ausencia de CSI en el receptor. Se vera ahora como es este detector en calidad y como experimenta la degradación con respecto al caso de disponer de CSI.

Si la palabra código transmitida es la cero, es claro que su verosimilitud, para que no se produzca un error con respecto a digamos la palabra uno, ha de ser mayor que esta segunda. En términos del detector, se ha de verificar (8.39).

$$\text{Traza} \left( \underline{\underline{Y}}_R \cdot \underline{\underline{C}}_0^H \cdot \underline{\underline{C}}_0 \cdot \underline{\underline{Y}}_R^H \right) > \text{Traza} \left( \underline{\underline{Y}}_R \cdot \underline{\underline{C}}_1^H \cdot \underline{\underline{C}}_1 \cdot \underline{\underline{Y}}_R^H \right) \quad (8.39)$$

Sustituyendo en esta expresión la señal recibida correcta, se llega a la siguiente desigualdad, en la que se ha omitido el término cuadrático del error.

$$\mathbf{r} \cdot \text{Traza} \left[ \underline{\underline{H}} \cdot \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}^H \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \right) \cdot \underline{\underline{H}}^H \right] > 2\mathbf{r}^{1/2} \cdot \text{Re} \left\{ \text{Traza} \left[ \underline{\underline{W}} \cdot \left( \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}}^H \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}^H \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \right) \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \right] \right\}$$

En esta expresión, el término de la izquierda es una variable aleatoria y el de la derecha es un umbral. Cuando la variable aleatoria no verifique la desigualdad se comete un error. Razonando del mismo modo al que se realizó en el capítulo anterior, pueden escribirse las siguientes expresiones para la probabilidad de error y la promediada con respecto a la estadística del canal:

$$\begin{aligned} \Pr(\underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \rightarrow \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}) &\approx Q \left( \sqrt{\left( \frac{2E_s}{N_0} \right) \text{Traza}(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{A}}_{\text{NOCSI}} \cdot \underline{\underline{H}}^H)} \right) \approx \\ &\approx k_1 \cdot \exp \left[ - \left( \left( \frac{2E_s}{N_0} \right) \text{Traza}(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{A}}_{\text{NOCSI}} \cdot \underline{\underline{H}}^H) \right) \right] \quad (8.40) \\ \Pr^{AVE} &\approx k_2 \cdot \prod_{p=1}^{n_R} \frac{1}{\det \left[ \underline{\underline{I}} - \left( \frac{E_s}{2 \cdot N_0} \right) \underline{\underline{A}}_{\text{NOCSI}} \underline{\underline{\Sigma}}_p \right]} \end{aligned}$$

Nótese que la energía transmitida, con N accesos al canal viene dada por (8.41).

$$E_s = \left( \frac{N}{n_T} \right) E_T \quad (8.41)$$

La diferencia fundamental es que ahora la ganancia de código no viene dada por la matriz del error entre las dos matrices sino por su producto (restado a la identidad). En (8.41) el lector puede observar las diferencias entre ambas ganancias.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_{\text{CSI}} &= (\underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}) (\underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}})^H \\ \underline{\underline{A}}_{\text{NOCSI}} &= \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}^H \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}}^H \end{aligned} \quad (8.42)$$

Con el fin de comparar ambas expresiones, nótese que:

$$\begin{aligned} \left| \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}^H \right|^2 &= \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}^H \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}}^H - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}^H - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}}^H = \\ 2 \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}^H - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}}^H - \underline{\underline{A}}_{\text{NOCSI}} &= \underline{\underline{A}}_{\text{CSI}} - \underline{\underline{A}}_{\text{NOCSI}} \quad (8.43) \\ \text{Así pues,} \\ \underline{\underline{A}}_{\text{CSI}} &= \underline{\underline{A}}_{\text{NOCSI}} + \left| \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}^H \right|^2 \end{aligned}$$

Es decir, la pérdida de CSI en el receptor disminuye la ganancia de código que, aunque medida por el determinante de las expresiones (8.42), es claro a partir de (8.43) que disminuiría.

Una solución para estabilizar dicha disminución con un receptor de baja complejidad la proporcionan los denominados códigos espacio-tiempo diferenciales que no son mas que una extrapolación al caso de diversidad de las denominadas modulaciones diferenciales de cursos básicos de comunicaciones.

### VIII.5. CODIGOS S-T DIFERENCIALES.

Antes de abordar el problema diferencial y para facilitar su explicación es interesante recordar como es el detector para un sistema MIMO en el que las palabras código son a su vez matrices. Dichas matrices en un numero de  $M$ , igual a  $2^L$ , permiten alojar  $L$  streams en  $N$  accesos, es decir, las palabras código serán de dimensión  $(n_T, N)$ . Se representara el alfabeto de las palabras código, al igual que en el apartado anterior, según sigue:

$$\underline{\underline{C}}_m \quad m=1, M \quad (8.44)$$

Si dichas matrices son ortonormales, también igual que en el apartado anterior, el detector de máxima verosimilitud se reduce a (8.45), admitiendo aun que el detector dispone de CSI.

$$\left| \underline{\underline{X}}_R - E_s^{1/2} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{C}}_m \right|_F \Rightarrow \hat{\underline{\underline{C}}} = \underset{\underline{\underline{C}}_m; m=1, M}{Max} \left[ \text{Re} \left( \text{Traza} \left( \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{C}}_m \cdot \underline{\underline{X}}_R \right) \right) \right] \quad (8.45)$$

Un análisis similar al llevado a cabo en el capítulo anterior, conduciría a las expresiones de (8.46) para la probabilidad de error, su cota exponencial y su promedio. Siempre en el caso habitual de baja correlación de antenas en el receptor y de canal Rayleigh.

$$\begin{aligned} Pe &= \Pr \left( \underline{\underline{C}}_m \rightarrow \underline{\underline{C}}_n; \tilde{\underline{\underline{C}}} \equiv \underline{\underline{C}}_m - \underline{\underline{C}}_n \right) = k_0 \cdot Q \left( \sqrt{\frac{E_s}{2 \cdot N_0} \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{R}}_H \cdot \tilde{\underline{\underline{C}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{C}}}^H \right)} \right) \\ Pe &\approx k_1 \cdot \exp \left[ -\frac{E_s}{4 \cdot N_0} \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{R}}_H \cdot \tilde{\underline{\underline{C}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{C}}}^H \right) \right] = k_1 \cdot \exp \left[ -\frac{E_s}{4 \cdot N_0} \cdot \sum_{p=1}^{n_R} h_p^H \cdot \tilde{\underline{\underline{C}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{C}}}^H \cdot h_p \right] \quad (8.36) \\ Pe^{aver} &= k_2 \cdot \prod_{p=1}^{n_R} \frac{1}{\det \left[ \underline{\underline{I}} + \frac{E_s}{4 \cdot N_0} \cdot \tilde{\underline{\underline{C}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{C}}}^H \cdot \underline{\underline{\Sigma}}_j \right]} \end{aligned}$$

Volviendo al motivo de este apartado, si el receptor tampoco dispone de CSI, el problema para implementar (8.45) es que el transmisor ha de realizar dos accesos. En el primer accesos transmite la matriz identidad para que el receptor estime el canal y en el segundo envía una palabra código. En otras palabras, el transmisor trabajaría según se representa en la Figura 8.8, usando dos accesos matriciales al canal, de los cuales tan solo uno es información. En el otro acceso el receptor lo usa para identificar el canal, como ya se ha comentado.

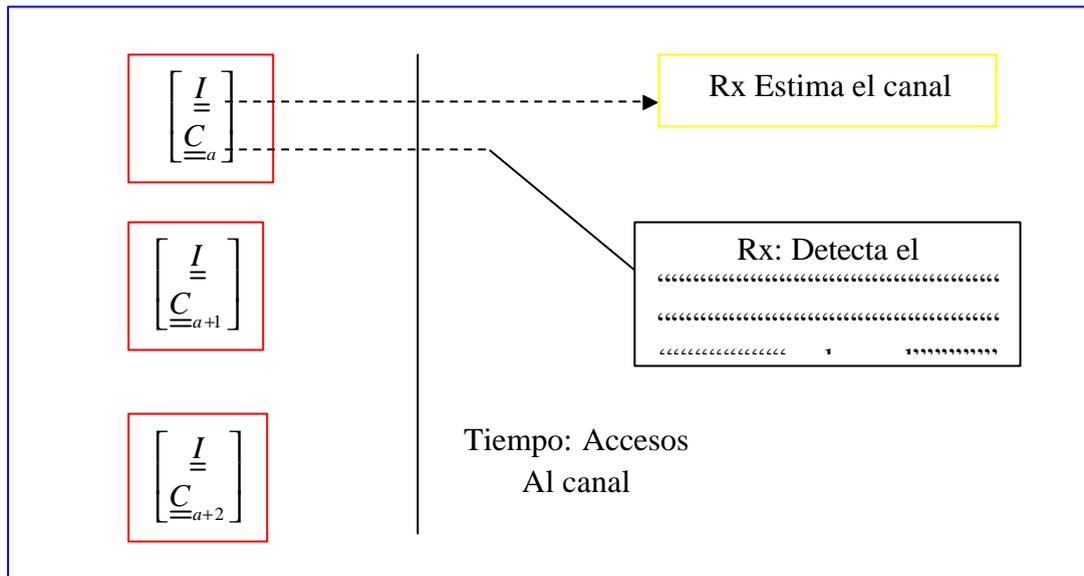


Figura 8.8. Sistema de CSI en Rx para canal de alta variabilidad.

Una posibilidad mucho mas interesante que, pero basada en ella, la anterior es solapar los paquetes de dos accesos. Este solapamiento se realizaría multiplicando las matrices. Las palabras recibidas al solapar como se ha indicado se representan en la figura siguiente.

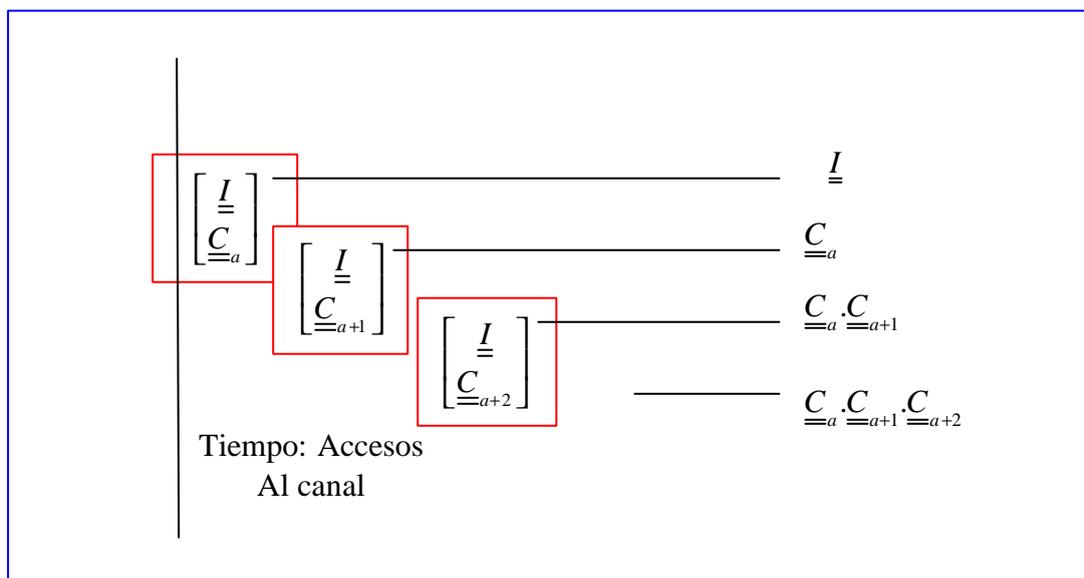


Figura 8.9. Principio de la codificación diferencial.

Como puede verse, en cada acceso se va acumulando el producto de todas las "codewords" empleadas en el transmisor y solo hay una nueva por acceso (salvo la primera). Aparentemente el sistema ha suprimido la redundancia necesaria para la estimación del canal. Esta parte es la favorable, un "codeword" en lugar de dos, el precio es que como veremos el receptor sigue necesitando dos matrices recibidas.

Se denominara con una nueva matriz a la matriz producto.

$$\underline{Z}_{n-1} = \prod_{a=1}^{n-1} \underline{C}_{n-a} \quad (8.47)$$

Sea la señal recibida en el instante  $n-1$  la siguiente:

$$\underline{X}_{R,n-1} = \underline{H} \cdot \underline{Z}_{n-1} + \underline{W}_{n-1} \quad (8.48)$$

Mientras que la recibida en el instante  $n$  puede escribirse como (8.49).

$$\begin{aligned} \underline{X}_{R,n} &= \underline{H} \cdot \underline{Z}_{n-1} \cdot \underline{C}_n + \underline{W}_n = \left( \underline{X}_{R,n-1} - \underline{W}_{n-1} \right) \cdot \underline{C}_n + \underline{W}_n \\ \underline{X}_{R,n} &= \underline{X}_{R,n-1} \cdot \underline{C}_n + \left( \underline{W}_n - \underline{W}_{n-1} \cdot \underline{C}_n \right) = \underline{H}_{nuevo} \cdot \underline{C}_n + \underline{W}_{nuevo} \end{aligned} \quad (8.49)$$

Como puede verse en la segunda parte de esta última fórmula el receptor recibe la palabra código transmitida con un nuevo canal y un nuevo ruido. El nuevo canal no es más que la matriz recibida en el acceso anterior. Con respecto al ruido, debido a la ortonormalidad de las matrices del código, sigue siendo blanco y tan solo la potencia ha pasado a ser el doble, son los 3 dB. de pérdida de todos los sistemas diferenciales. Claramente el receptor óptimo será:

$$\left| \underline{X}_{R,n} - \underline{X}_{R,n-1} \cdot \underline{C}_n \right|_F \Rightarrow \hat{\underline{C}} = \underset{\underline{C}_n; n=1, M}{Max} \left[ \text{Re} \left( \text{Traza} \left( \underline{X}_{R,n-1} \cdot \underline{C}_n \cdot \underline{X}_{R,n}^H \right) \right) \right] \quad (8.50)$$

Aun siendo el resultado correcto, el análisis anterior no es formal y no resulta apropiado para evaluar el sistema. Para analizar con detalle la probabilidad de error que tiene un codificador de este tipo, supongamos que la transmisión se inicia con una primera palabra que denominaremos matriz  $\underline{D}$  dicha matriz será ortogonal como son las “codewords”. además, tanto las “codewords” como dicha matriz inicial se elegirán de modo y manera que cualquier matriz transmitida verifique la ortogonalidad, es decir, se verifique (8.51).

$$\begin{aligned} \text{si } \underline{Z}_{k-1} \cdot \underline{Z}_{k-1}^H = \underline{I} \text{ entonces } \forall \underline{C}_m; m=1, M \\ \text{severifique, si } \underline{Z}_k = \underline{Z}_{k-1} \cdot \underline{C}_m \text{ tambien } \underline{Z}_k \cdot \underline{Z}_k^H = \underline{I} \end{aligned} \quad (8.51)$$

El detector óptimo para este sistema de transmisor sería recolectar todas las matrices recibidas y maximizar la verosimilitud de dicha secuencia sobre las posibles secuencias de palabras código. El detector así diseñado resulta de una gran complejidad. Un receptor subóptimo pero muchísimo más sencillo es considerar dos símbolos recibidos consecutivos  $\left[ \underline{X}_{R,k-1} \quad \underline{X}_{R,k} \right]$ , que considerado como un solo símbolo contiene la información de una nueva palabra código formada por:

$$\left[ \underline{Z}_{k-1} \quad \underline{Z}_{k-1} \cdot \underline{C}_k \right] \equiv \bar{\underline{C}}_k \quad (8.52)$$

Planteado de este modo se esta ante un caso de código para no CSI en el receptor como se analizo en el apartado anterior. Nótese que, al verificarse (8.53), el detector cuadrático se reduce al clásico detector diferencial como ya se anticipo y que se reproduce de nuevo en (8.54).

$$\underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}}}^H \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}}} \\ \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}}}^H & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \quad y \quad \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}}}^H = 2 \cdot \underline{\underline{I}} \quad (8.53)$$

$$\text{Traza} \left[ \begin{pmatrix} \underline{\underline{X}}_{\underline{\underline{R}},k-1} & \underline{\underline{X}}_{\underline{\underline{R}},k} \\ \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}}} & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}}} \\ \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}}}^H & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{X}}_{\underline{\underline{R}},k-1}^H \\ \underline{\underline{X}}_{\underline{\underline{R}},k}^H \end{pmatrix} \right] = \text{Traza} \left[ \underline{\underline{X}}_{\underline{\underline{R}},k} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}}}^H \underline{\underline{X}}_{\underline{\underline{R}},k-1}^H \right] \quad (8.54)$$

Con respecto a la probabilidad de error, la matriz  $\underline{\underline{A}}$  del detector cuadrático pasa a ser (8.55)

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \underline{\underline{I}} - \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}0}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}1}}^H \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}1}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{k}0}}^H = \\ & = 2 \underline{\underline{I}} - \frac{1}{2} \cdot \left( \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}^H \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1}}^H + \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}}^H \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1}}^H + \underline{\underline{I}} \right) = \\ & = \underline{\underline{I}} - \frac{1}{2} \cdot \left( \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}}^H \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1}}^H + \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}}^H \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1}}^H \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} - \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \right) \cdot \left( \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} - \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \right)^H \right] = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \left[ \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} - \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \right] \cdot \left[ \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{0}}} - \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{1}}} \right]^H \underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{k}-1}}^H = \underline{\underline{A}}_{DIF} \end{aligned} \quad (8.55)$$

además teniendo en cuenta que el determinante del producto permite conmutar las matrices y la ortogonalidad de las  $\underline{\underline{Z}}$  entonces puede verse que la ganancia de código para el caso diferencial es idéntica a la que presenta el caso de perfecto CSI en el receptor, salvo el factor  $\frac{1}{2}$  que son los tradicionales 3 dB de perdida de un sistema diferencial y sub-optimo.

## VIII.6 EJEMPLOS CODIGOS S-T DIFERENCIALES.

El tremendo interés de los códigos para sistemas diferenciales es su indudable adaptación al entorno radio. Afortunadamente la forma en que estos códigos consiguen diversidad o rango completo en la matriz  $\underline{\underline{A}}$ , y maximizan su determinante es idéntico al caso con CSI por lo que las matrices a emplear son las mismas que se han expuesto con la salvedad de que han de formar un grupo, es decir, la multiplicación de dos palabras código cualquiera ha de seguir siendo una palabra código, respetando así todo lo visto en el apartado anterior. Aparentemente esto daría lugar a matrices diferentes de las vistas anteriormente pero rápidamente apreciara el lector que no es así.

Comenzando por el código de menor  $(\underline{C}_0 - \underline{C}_1) \cdot (\underline{C}_0 - \underline{C}_1)^H$  “rate” y siempre para dos antenas, el código transmitirá un bit por “codeword” con lo que tan solo se requieren dos matrices que forman el grupo  $\Phi$  y que serán (8.56).

$$\Phi = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.56)$$

Con una matriz  $\underline{D}$  igual a (8.57) con la que se iniciaría la transmisión.

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.57)$$

El código transmite un bit con dos accesos luego el “rate” será 0.5. La constelación necesaria para las antenas es BPSK, es decir, de 1 bit/seg/Hz. El determinante de la mínima distancia sobre dos palabras validas, la ganancia de código como se la ha definido por otros autores sería de 8.

Un código de “rate” unidad implica disponer de cuatro matrices, que sobre la misma matriz inicial conformarían un sistema también en 1 bit/seg/Hz ósea usando BPSK como constelación. Su ganancia es cuatro.

$$\Phi = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (8.58)$$

Para el caso de “rate” 1.5, manteniendo dos accesos, se requieren 8 matrices, denominándose al grupo quaternion, y que se listan a continuación:

$$\Phi = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (8.59)$$

El sistema es sobre QPSK (2 bits/seg/Hz.), tiene también una ganancia de 4, igual que el anterior pero con un “rate” mayor, es básicamente el código de Alamouti.

Para “rates” mas elevados las matrices se generan fácilmente con la ayuda del sistema generador siguiente:

$$w_Q = \exp(j2\mathbf{p}/Q)$$

$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & w_Q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m; m = 0, 2Q-1 \right\} \quad (8.60)$$

así por ejemplo, el código de “rate” 2 se formaría con Q igual a 8 y el de “rate” 2.5 con Q igual a 16. Las ganancias de estos dos códigos serían 1.531 y 07804 respectivamente.

## VIII.7. RESUMEN.

En el presente capítulo se han abordado brevemente los diferentes tipos básicos de códigos espacio temporales. Los primeros denominados OSTBC son destacables por la sencillez del receptor. No obstante tienen limitado su "rate" por debajo de la unidad para el caso de aperturas de más de dos antenas. Sobrepasar este número conlleva un detector ML tradicional o detectores subóptimos de cancelación sucesiva de ISI.

códigos con mayor ganancia que los OSTBC pero con detector ML son la versión espacio tiempo de códigos convolucionales, también llamados códigos "trellis" o celosía. Su presentación ha sido lo más breve posible, al mismo tiempo que ha evidenciado la juventud del tema. Muchos de los conceptos expuestos están aun en discusión como son las medidas de calidad del código y su diseño óptimo en consecuencia con las cuestiones que levantan los criterios de calidad expuestos. Mas adaptados a la variabilidad del canal radio presentan un problema en su imbricación con capas o "layers" superiores del sistema de comunicación.

A continuación se ha expuesto el detector y la calidad resultante para el caso de no disponer de CSI en el receptor. El detector óptimo resulta ser el denominado cuadrático y el precio por no disponer de CSI, con respecto a disponer de este en el receptor, es pasar de una matriz de error a una matriz producto, de una ganancia que puede ser considerablemente inferior. Lo que llama la atención de esta situación es la sencillez o baja complejidad de dicho detector, sin duda, asociada a la pérdida de calidad en tasa de error.

Los últimos apartados se han dedicado a la que es sin duda la solución más brillante para el entorno radio, los códigos diferenciales. Después de una interpretación en forma de CSI encubierto y recuperando lo conocido del detector cuadrático, se ha presentado un detector subóptimo que procesando dos símbolos simultáneamente permite detectar con la misma calidad con CSI perfecto, con la misma forma del error y tan solo con 3 dB. de pérdida a cambio de una extraordinaria sencillez en transmisor y receptor. El detector cuadrático aplicado a un sistema de dos símbolos sobre codificación diferencial permite alcanzar calidades muy buenas con una dependencia nula del CSI tanto en Tx como en Rx.

La restricción adicional sobre las posibles "codewords" no representa un problema mayor del que en su momento el lector pudo tener en el caso de códigos bloque, en lo que se refiere a la elección del alfabeto. El último apartado recoge algunos ejemplos de códigos s-t diferenciales para dos antenas.

## VIII.8. REFERENCIAS.

- [1] V. Tarokh, N. Seshadri, A.R. Calderbank. "Space-time codes for high data rate wireless communication: Performance criterion and code construction". IEEE-IT, Vol. 44, no.2, pp. 744-765. March 1998
  - [2] B.L. Hughes. "Differential space-time modulation". 0-7803-5668-3/99. pp. 145-149. 1999 IEEE.
-

- [3] S. Alamouti. "A simple transmit diversity technique for wireless communications". IEEE- JSAC, vol. 16, no. 8, pp. 1451-1458, Oct. 1998.
- [4] B.M. Hochwald, T.L. Marzetta. "Unitary space-time modulation for multiple antenna communications in Rayleigh flat fading" IEEE Trans on Information Theory. 1998.
- [5] V. Tarokh, H. Jafarkhani. " A differential detection scheme for transmit diversity". IEEE-JSAC, 1999.
- [6] G. Rayleigh, J. Chioffi. "Spatio-temporal coding for wireless communications. IEEE Globecom 96, pp. 1809-1814, 1996.
- [7] E.G. Larsson, P. Stoica. "Space-time block coding for wireless communications" Cambridge University Press. 2003.
- [8] H. Samra, Z. Ding, P. H. Hahn. "Symbol mapping diversity design for multiple packet transmissions". IEEE Communications, Vol. 53, No. 5, pp. 810-817, May 2005.
-