

CAPITULO IV: DETECCION INSTANTANEA (MSE y ZF) CON CSI EN TX.



Miguel Ángel Lagunas, Ana I. Pérez-Neira

CAPITULO IV: DETECCION INSTANTANEA.

IV.1. INTRODUCCION.....	4.3
IV.2. DETECTOR MSE Y ZF.....	4.5
IV.3. TRANSMISOR OPTIMO CON CSI.....	4.6
IV.4. ASIGNACION DE ENERGIA.....	4.8
IV.5. CONCLUSIONES.....	4.12
IV.6. REFERENCIAS.....	4.13
IV.A FUNCIONES S-CONCAVA y S-CONVEXA..	4.13
IV.B MINIMIZACION DE LAGRANGE.....	4.14

IV.1. INTRODUCCION.

En el capítulo II se presentó el detector de máxima verosimilitud. Dicho detector presentaba una expresión que será de gran relevancia en el presente capítulo. La expresión se reproduce a continuación:

$$\text{Traza} \left[\left(\underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \right) \cdot |\tilde{s}(n)|^2 \right] > 2 \cdot \text{Re} \left[\tilde{s}(n) \cdot \text{Traza} \left(\underline{\underline{W}}_n^H \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \right) \right] \quad (4.1)$$

El interés de esta expresión está en la matriz que, dependiendo del canal, aparece en el primer término. Dado que la matriz que sigue representa la distancia del símbolo transmitido a los más próximos, ha de interpretarse la primera matriz como la que condiciona como firma la distancia entre los símbolos en la estadística del receptor. Cuando en lugar de trabajar con un único símbolo, el canal MIMO transmite simultáneamente n_s streams de símbolos, mayor o igual al número de antenas transmisoras, la expresión anterior cambia a (4.2).

$$\text{Traza} \left[\left(\underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \right) \cdot \left| \tilde{\underline{\underline{I}}}_0 \cdot \tilde{\underline{\underline{I}}}_0^H \right|^2 \right] > 2 \cdot \text{Re} \left[\text{Traza} \left(\underline{\underline{W}}_n^H \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \tilde{\underline{\underline{I}}}_0 \right) \right] \quad (4.2)$$

Siendo $\tilde{\underline{\underline{I}}}_0$ la diferencia entre el vector de símbolos realmente transmitido $\underline{\underline{I}}_0$ y el vector de símbolos a los que se cometerá error $\underline{\underline{I}}_e$ si no se verifica la desigualdad anterior.

Es conveniente también recordar que en la estructura de la matriz de proceso del transmisor $\underline{\underline{B}}$ están implicadas tres matrices de carácter completamente diferentes y que se reproducen a continuación:

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{V}}^H \quad (4.3)$$

Recorriendo de izquierda a derecha cada una de estas matrices, la primera reúne el procesamiento espacial y tiene por dimensiones (n_T, n_0) , es decir, el número de antenas transmisoras por un entero que veremos que como máximo es igual al primero. Cada una de las columnas de esta primera matriz puede interpretarse como un conformador espacial que restringiremos a norma unidad. El número de conformadores, el segundo entero está aun por decidir. La segunda matriz, determina el nivel de energía que se va a dar a cada conformador y será una matriz cuadrada en el número de conformadores. En consecuencia esta segunda matriz realiza lo que se denomina un power allocation sobre los conformadores. Por último la tercera matriz, ha de entenderse como una modificación de la constelación inicial de símbolos. En otras palabras, esta tercera matriz convierte la constelación inicial que daba lugar a los n_s símbolos en un vector nuevo conteniendo n_0 símbolos, ya acomodado para distribuir cada uno en los respectivos conformadores y con un nivel de energía a decidir.

$$\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{V}}^H \cdot \underline{\underline{I}}_0 \quad \text{y} \quad \tilde{\underline{\underline{f}}} = \underline{\underline{V}}^H \cdot \tilde{\underline{\underline{I}}}_0 \quad (4.3)$$

El esquema detallado del transmisor aparece en la Figura 4.1.

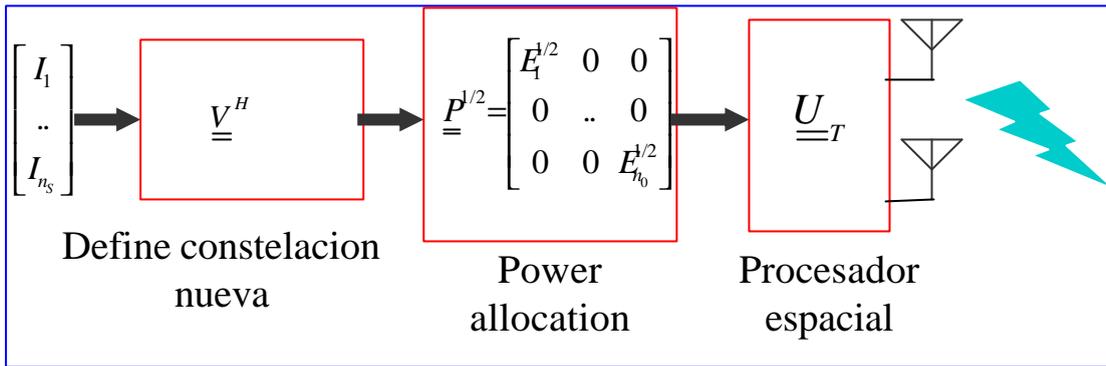


Figura 4.1 Estructura detallada del transmisor.

Lo importante de este esquema es que permite relegar, temporalmente a un segundo plano, el papel y el diseño de la matriz que modifica la constelación. Dicho de otro modo, el detector puede escribirse tal y como se muestra en (4.4) que separa perfectamente el proceso puramente temporal y espacial del transmisor.

$$\text{Traza} \left[\left(\underline{U}_T^H \cdot \underline{H}^H \cdot \underline{H} \cdot \underline{U}_T \right) \cdot \left[\underline{P}^{1/2} \cdot \underline{V}^H \cdot \tilde{\underline{I}}_0 \cdot \tilde{\underline{I}}_0^H \cdot \underline{V} \cdot \underline{P}^{1/2} \right]^2 \right] > 2 \cdot \text{Re} \left[\text{Traza} \left(\underline{W}_n^H \cdot \underline{H} \cdot \underline{B} \cdot \tilde{\underline{I}}_0 \right) \right] \quad (4.4)$$

Claramente si la primera matriz de esta expresión no es diagonal el sistema presenta interferencia ínter símbolos de naturaleza espacial, i.e. los canales espaciales formados por cada par de antenas transmisora y receptora se interfieren entre si. Así pues si dicha matriz no es diagonal el detector ha de ser por fuerza ML. Mas importante aun, proponiéndonos la baja complejidad del receptor y planteando un diseño MSE (Mínimo Error Cuadrático) o ZF (Zero Forcing) es claro que lo mejor que puede hacer el transmisor para ayudar al receptor es diagonalizar el canal.

Visto lo anterior, el presente capítulo desarrollara como seria el diseño de este receptor de baja complejidad, al reducir la búsqueda exhaustiva del detector ML, empleando un criterio MSE o ZF para su diseño. Nótese que una vez decidido diagonalizar y, teniendo presente que la otra matriz acomoda el vector de símbolos inicial al numero de conformadores, del transmisor solo resta diseñar la power allocation a cada conformador. También es importante destacar que al asumir que el transmisor diagonaliza el canal estaremos en una situación de CSI completo en el transmisor.

Resumiendo, el capítulo describirá, bajo criterio MSE o ZF, el diseño de transmisor y receptor asumiendo CSI completo en el transmisor. La previsión es que el transmisor ha de diagonalizar el canal y la constelación inicial ha de acomodarse a dicha diagonalización. En un capítulo posterior se analizara la situación con CSI parcial o nulo en el transmisor. También notara el lector que, al abandonar el detector ML se podrá describir el caso de entonos interferentes en los que la matriz de ruido mas interferencias no es diagonal. Recuerde en cualquier caso que, la inclusión de una matriz diferente de la identidad para el ruido, puede llevarse a cabo cambiando la expresión del canal como se indica en (4.5) en todo lo que sigue. Si desea utilizar el detector ML, además de este cambio, ha de blanquear el vector recibido en el receptor antes de introducirlo en el detector ML.

$$\underline{\underline{H}} \rightarrow \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{R}}_0^{-1/2} \quad (4.5)$$

IV.2 DETECTOR MSE Y ZF.

El diseño de un receptor MSE entraña la minimización de la diferencia entre la salida del receptor y lo que realmente se ha transmitido. La diferencia con respecto a un filtro tradicional de Wiener es que este suele presentarse en la forma de un solo canal y en este caso será multi-canal.

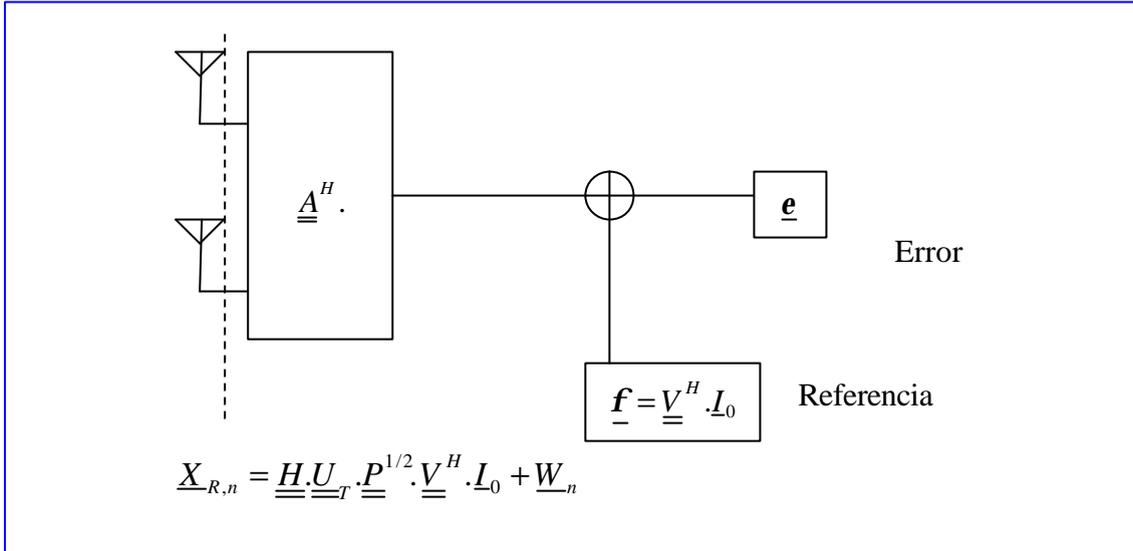


Figura 4.2. Diseño receptor MSE o filtro de Wiener multi-canal.

Así pues el criterio de diseño será la minimización de alguna, note aquí la diferencia con respecto a un diseño tradicional mono canal, función asociada a la matriz de covarianza del error, definida según sigue:

$$\underline{\underline{E}} = E[\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}}^H] = E\left[\left(\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{X}}_{Rn} - \underline{\underline{f}}\right) \cdot \left(\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{X}}_{Rn} - \underline{\underline{f}}\right)^H\right] \quad (4.6)$$

Nótese la diferencia de la formulación anterior con la de un detector ML.

$$E[\mathcal{S}(\underline{\underline{I}}_0)] = E\left[\left(\underline{\underline{X}}_{Rn} - \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}}_T \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \underline{\underline{f}}\right)^H \cdot \underline{\underline{R}}_0^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{X}}_{Rn} - \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}}_T \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \underline{\underline{f}}\right)\right] \quad (4.7)$$

Volviendo a la expresión (4.6), al sustituir la expresión del snapshot recibido se tendrá:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}^H \cdot \left[\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}}_T \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{U}}_T^H \cdot \underline{\underline{H}}^H + \underline{\underline{R}}_0 \right] \cdot \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{I}}_{n_r} - \underline{\underline{A}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}}_T \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} - \underline{\underline{P}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}}_T^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{A}} \quad (4.8)$$

Esta expresión puede escribirse de un modo alternativo que evidencia visualmente cual es el diseño óptimo del receptor.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}} &= \left[\underline{\underline{A}} - \left(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{U}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H + \underline{\underline{R}}_0 \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \right] \cdot \left(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{U}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H + \underline{\underline{R}}_0 \right) \\ & \left[\underline{\underline{A}} - \left(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{U}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H + \underline{\underline{R}}_0 \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \right]^H + \\ & \underline{\underline{I}}_{n_R} - \underline{\underline{P}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \left(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{U}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H + \underline{\underline{R}}_0 \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Note que lo que esta en la tercera línea de la formula anterior no depende del diseño que se desea realizar. Al mismo tiempo, los términos que dependen del diseño, en las dos primeras líneas de la misma formula, pueden hacerse cero. Con lo que (4.10) completa el diseño del receptor.

$$\underline{\underline{A}}_{MSE} = \left(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{U}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H + \underline{\underline{R}}_0 \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \quad (4.10)$$

Además, al sustituir la expresión del detector MSE en la covarianza del error se obtiene el valor mínimo correspondiente.

$$\underline{\underline{E}}_{\min}^{MSE} = \underline{\underline{I}}_{n_R} - \underline{\underline{P}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \left(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{U}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H + \underline{\underline{R}}_0 \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \quad (4.11)$$

Una expresión alternativa a la anterior es usar el lema de la inversa sobre esta última lo que da lugar a una expresión mas compactada de la matriz de covarianza del error.

$$\underline{\underline{E}}_{\min}^{MSE} = \left(\underline{\underline{I}}_{n_R} + \underline{\underline{P}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{R}}_0^{-1} \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \right)^{-1} \quad (4.12)$$

Es fácil de comprobar que las expresiones duales, para el caso de ZF, de las expresiones (4.10) y (4.12) son:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_{ZF} &= \left(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{R}}_0^{-1} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \\ \underline{\underline{E}}_{\min}^{ZF} &= \left(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{R}}_0^{-1} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Llegado a este punto queda, lo que aparentemente resultaría más sencillo que es el diseño del transmisor. Se tomara como referencia el caso MSE, ya que es completamente similar al caso de ZF, usándose a partir de este momento la expresión (4.12). Refiriéndonos a esta expresión, nótese que la inclusión de la matriz de cambio de constelación, se ha podido evitar y que la matriz de conformadores, como era de prever aparece asociada al canal espacial MIMO. Así pues, a continuación se pasara al diseño del procesador espacial del transmisor y a la distribución de energía óptima para cada conformador que forme el procesador espacial.

IV.3. TRANSMISOR OPTIMO CON CSI.

El diseño del transmisor optimo entraña a su vez dos diseños diferentes. El primero concierne al procesador espacial y es previo al segundo, que es la asignación de potencia a cada conformador.

Como ya se ha expuesto en la introducción, la ayuda más estimable que el transmisor puede aportar al sistema es diagonalizar el canal o, en términos más prácticos suprimir la ISI consiguiendo canales espaciales sin interferencia entre ellos. A la pregunta de que formalidad respalda una decisión tan intuitiva, baste decir que las funciones asociadas a la matriz de covarianza, no tiene sentido hablar de minimizar una matriz, lo estarán a los valores en su diagonal que es el MSE en cada símbolo transmitido mas aquellos que se incluyan fuera de sus diagonales. Dado que es una matriz de covarianza es definida positiva con lo que los valores fuera de su diagonal como poco incrementarían la función elegida. No obstante, el lector podrá ver una prueba más formal aun que la anterior. En conclusión, por razones practicas y formales, cualquier mínimo que se persiga, vía una función definida sobre las componentes de la matriz, será mas pequeño si la matriz esta previamente diagonalizada.

En conclusión, y asumiendo que el transmisor dispone de CSI su diseño optimo pasa por identificar su procesador espacial con los autovectores del canal MIMO.

$$\begin{aligned} \text{si } \underline{\underline{R}}_H &\equiv \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{R}}_0^{-1} \cdot \underline{\underline{H}}^H = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{U}}^H \\ \text{con } \underline{\underline{D}} &= \text{diag}(\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_{n_0}) \quad \text{y} \quad n_0 \leq \min(n_T, n_R) \\ \text{entonces } \underline{\underline{U}}_T &= \underline{\underline{U}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Es decir, los conformadores son directamente los autovectores de la matriz de canal y su numero igual al rango de esta. Note pues que el máximo numero de canales disponibles será igual, como mucho, y salvo correlación fuerte en el lado transmisor o receptor, al numero de antenas mas pequeño que se vayan a usar en el transmisor o en el receptor.

Claramente este diseño, como se ha indicado, convierte el canal MIMO en n_0 canales sin ISI, cuya ganancia es precisamente el correspondiente autovalor.

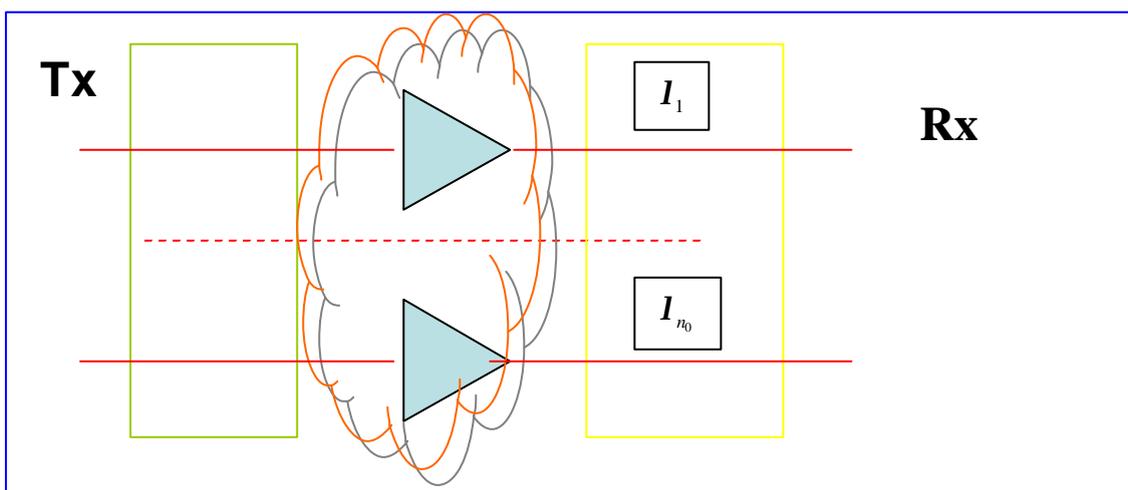


Figura 4.3.- Canal MIMO diagonalizado o eigenmodes.

Solo resta ahora, atendiendo a los autovalores o ganancia de cada uno de los denominados eigenmodes del canal MIMO el asignar de manera optima la potencia a cada uno de estos eigenmodes.

IV.- ASIGNACION DE ENERGIA (POWER ALLOCATION).

Una vez diagonalizada, la matriz del error presenta la forma expuesta en la siguiente expresión:

$$\underline{\underline{E}}_{\min}^{MSE} = \left(\underline{\underline{I}}_{n_R} + \underline{\underline{P}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{P}}^{1/2} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \mathbf{I}(1) \cdot \mathbf{b}(1)} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \frac{1}{1 + \mathbf{I}(n_0) \cdot \mathbf{b}(n_0)} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

También es de destacar que, siempre y solo si la matriz de covarianza se encuentra diagonalizada, puede hablarse de la SNR por stream usando la relación mono-canal entre el MSE y la SNR según se indica a continuación:

$$SNR = \frac{1}{MSE} - 1 \quad SNR(q) = \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{b}(q) \quad (4.16)$$

Además de la SNR se puede pasar a hablar de probabilidad de error al símbolo contenido en cada stream vía la función $Q(\cdot)$ o usando la cota de Chernoff de esta, tal y como se expresa en (4.17) y donde k_0 depende de la constelación usada.

$$BER(q) = k_1 \cdot \exp(-k_0 \cdot SNR(q)) \quad (4.17)$$

Aquí aparece la mayor diferencia con respecto al caso de un solo stream. Mientras que, para el caso de un stream minimizar error equivale a maximizar SNR y minimizar la VER, en el caso multi-canal se complica la relación. Como podrá ver en breve criterios similares en una de estas tres figuras de merito no producen diseños equivalentes. No solo funciones iguales producen diseños diferentes, sino que además las diferencias resultan sorprendentes en muchos casos.

El primer diseño que se abordara por parecer intuitivo será la media aritmética del MSE. Formalmente, antes de diagonalizar, el objetivo seria (4.18).

$$\Psi = f \left(\underline{\underline{E}} = \text{diag} [\underline{\underline{E}}] \right) \frac{1}{n_R} \sum_{q=1}^{n_R} E_{qq} \quad (4.18)$$

La necesidad formal de la diagonalización sigue a continuación.

Dado que la función $f(\cdot)$, en este caso la media aritmética, es una función Schur-cóncava (Ver apéndice IV.A), entonces cualquier vector \underline{x} que mayoriza el vector inicial hace mas pequeña la función. Es decir:

$$\begin{aligned} f(\cdot) & \text{ es Schur-concava} \\ \text{si } \underline{\underline{E}} \prec \underline{x} & \text{ entonces} \\ f(\underline{\underline{E}}) & \geq f(\underline{x}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Puesto que los autovalores siempre mayorizan a los valores de la diagonal, entonces, la $f(\cdot)$ o la media aritmética de los autovalores será menor que la función original. En consecuencia, es necesario diagonalizar y luego proceder a la minimización. Esta es la manera mas formal, que no intuitiva en términos de ingeniería, de probar la necesidad de diagonalizar.

Una vez diagonalizada, la expresión a minimizar, junto con la restricción de energía total transmitida será:

$$\sum_{q=1}^{n_0} \frac{1}{1 + \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{b}(q)} \Big|_{MIN} \quad (4.20)$$

$$\sum_{q=1}^{n_0} \mathbf{b}(q) \leq E_T$$

La solución de este problema puede llevarse a cabo vía Lagrange (Ver Apéndice IV.B), lo que conduce a la siguiente solución:

$$\mathbf{b}(q) = \left[\mathbf{m} \mathbf{l}(q)^{-1/2} - \mathbf{I}(q)^{-1} \right]^+ \quad (4.21)$$

Donde $[\cdot]^+$ indica asignar valor cero si el argumento es negativo. La constante μ es para ajustar el nivel de energía transmitida.

La solución revela que ciertos eigenmodes del canal MIMO es mejor no utilizarlos. Tan solo en el caso de elevada energía transmitida todos los modos disponibles se verán activados.

Tomando ahora el caso de desear minimizar la media geométrica del MSE, de nuevo la función es S-C, y el problema a resolver es :

$$\prod_{q=1}^{n_R} \left(\frac{1}{1 + \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{b}(q)} \right) \Big|_{MIN} \quad (4.22)$$

$$\sum_{q=1}^{n_0} \mathbf{b}(q) \leq E_T$$

Por el mismo procedimiento, que en la media aritmética, se puede encontrar la solución que viene dada por (4.23). Como recordará el lector del capítulo anterior, esta es la distribución óptima para capacidad. Es decir, minimizar la media geométrica del MSE es equivalente a maximizar la capacidad del canal MIMO.

$$\mathbf{b}(q) = \left[\mathbf{m} - \mathbf{I}(q)^{-1} \right]^+$$

Mas interesante es notar que, la media geométrica se beneficia de un canal perfecto (error cero) y automáticamente los demás le traen sin cuidado. De nuevo, observamos que la maximización de capacidad es la propuesta mas desigual pues da mas al que

mejor esta. Debe tener presente, que si adopta este criterio, puede ocurrir que le aparezca un stream con error muy pequeño y todos los demás a 0.5 de BER, no ocurre nada mas que ha de dejar usar el resto de streams y empaquetar todos los símbolos iniciales en un solo símbolo usando la matriz $\underline{\mathbf{V}}$ que aun esta disponible si se requiere su uso.

La siguiente alternativa seria la media harmónica del MSE. En este caso el objetivo es:

$$\sum_{q=1}^{n_0} \frac{1}{E_{qq}} \rightarrow \sum_{q=1}^{n_0} (1 + \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{b}(q)) \Big|_{MAX} \quad (4.23)$$

$$\sum_{q=1}^{n_0} \mathbf{b}(q) \leq E_T$$

La solución a este problema constituye en dar toda la energía disponible al mejor canal con lo que conduce al empleo de un solo conformador que es el autovector máximo.

La siguiente alternativa es la mas, digamos, social con los eigenmodes ya que pretende minimizar el máximo MSE. Esta función, a diferencia de las anteriores es Schur-convexa por lo que su mínimo esta en la solución uniforme, es decir todos los MSE iguales. Conseguir el mismo MSE para todos los streams puede realizarse de dos modos diferentes. La primera alternativa es sin involucrar en el diseño a la matriz de la constelación $\underline{\mathbf{V}}$ y obligar a (4.24) directamente.

$$\frac{1}{1 + \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{b}(q)} = \mathbf{a}^{-1} \Rightarrow \mathbf{b}(q) = \frac{\mathbf{a} - 1}{\mathbf{I}(q)}$$

$$\text{con } \sum_{q=1}^{n_0} \mathbf{b}(q) = E_T \text{ se obtiene } \mathbf{b}(q) = \frac{E_T}{\sum_{p=1}^{n_0} \mathbf{I}(p)^{-1}} \frac{1}{\mathbf{I}(q)} \quad (4.24)$$

Esta solución es una forma de W-F de tipo logarítmico. La segunda alternativa que involucra a la matriz de constelación consiste en legar a esta matriz el papel de repartir el error de los n_0 canales en los n_0 streams originales, es decir, ella implementa el equilibrio que exige la solución mínima. Así pues, se ha de seleccionar el que se considere mejor procedimiento de los anteriores, se trata de la media aritmética, y diseñar la matriz de constelación para que cada stream original vea el mismo error. Dado que, en un capítulo posterior, se va a analizar con detalle el diseño de la matriz de constelación, se pospondrá hasta entonces su diseño.

El apartado continuaría con similares objetivos pero referidos ahora para la SNR o la BER. Veamos rápidamente estos casos, mas para evidenciar las diferencias que surgen que por su valor técnico.

Si se minimiza la media aritmética de la SNR, sorprendentemente la solución pasa a ser la de toda la energía al mejor canal, solución que hemos denominado, por

razones obvias, beamforming. Observe como cambia de la media aritmética del MSE, un buen criterio, con respecto a la media de la SNR.

Si la función es la media geométrica de la SNR es UPA (Uniform Power Allocation) exactamente la misma que maximiza la capacidad ergodica y a la que converge W-F para elevadas energías en transmisión. La media harmónica de la SNR es Schur-convexa y tiene la misma solución que mínimas del MSE.

Con respecto a mínimas de la SNR, al igual que mínimas de la BER, la solución es la misma ya que esta función se mantiene Schur convexa en todos los casos.

La media geométrica de la BER conduce de nuevo a beamforming y, por ultimo, la mejor, que es la media aritmética de la BER no tiene una solución cerrada. Esta ultima es la mejor, en términos de calidad, aunque su implementación es compleja. Probablemente, la decisión en un buen compromiso entre calidad y complejidad sea la media aritmética del MSE.

Media MSE	Geom. MSE	Harmoni-ca MSE	Míni-max MSE, SNR, BER	Media SNR	Geom.. SNR	harmónica SNR	Geom.. BER	Media BER
$b = \begin{bmatrix} ml^{+1/2} \\ -I^{-1} \end{bmatrix}^T$	W-F	Beam-forming	Usar constelación y $b = \begin{bmatrix} ml^{+1/2} \\ -I^{-1} \end{bmatrix}^T$	Beam-forming	UPA	Igual a minimax	Beam-forming	La mejor sin solución cerrada

La tabla mostrada resume las diferentes posibilidades de asignación de potencia.

IV.- CONCLUSIONES.

En este capitulo se ha presentado el diseño MSE i ZF del receptor y, una vez realizado dicho diseño, se ha pasado a diseñar el transmisor en sus tres afecciones, es decir, en términos de diseño de constelación, de asignación de potencia a cada canal virtual y del procesador espacial.

Merece destacar los beneficios derivados de diagonalizar el canal y mudar el canal MIMO con ISI a un conjunto de canales, igual o inferior, aislados unos con otros y sin ISI, eso si, con una ganancias que mayorizan las ganancias originales. El hecho de que en los canales diagonalizados, denominados eigenmodes MIMO, las ganancias sean los autovalores facilita el problema de la ISI pero agranda la distancia entre canales buenos y canales malos. En cualquier caso la diagonalización, siempre que el CSI lo permita, beneficia la calidad y capacidad del enlace.

Se ha podido evidenciar cuan diferente es el procesado multi-canal con respecto al mono-canal. No solo la expresión del filtro de Wiener multi-canal es considerablemente diferente del caso de un solo canal; también, se puede calificar de

sorprendente el hecho que criterios idénticos en el caso de un solo canal, al aplicarse al entorno multi-canal, producen diseños, a veces, diametralmente opuestos. Esta última faceta del proceso multi-canal ha aparecido cuando se han descrito las técnicas de asignación de potencia a los eigenmodes del canal MIMO. Criterios multi-stream de error cuadrático medio, relación señal a ruido y probabilidad de error, aun siendo similares, producen soluciones muy diferentes dependiendo sobre que parámetro de calidad, a nivel de canal singular, aplican. La conclusión es que la media aritmética del MSE es la solución que presenta un buen compromiso calidad/complejidad frente al mejor candidato que es la media de la probabilidad de error de cada stream.

A lo largo del capítulo se ha tratado de simplificar el grado de implicación que la matriz, denominada como, de diseño de la constelación influye en el diseño del canal MIMO. En el capítulo dedicado a diseño ML sobre MIMO esta matriz cobrará el valor que le corresponde, probablemente el más importante, en el diseño del transmisor. Aquí en este capítulo, ha salido a escena en dos ocasiones que es bueno recordar. En la primera, cuando ciertos eigenmodes, al igual que cuando se maximiza capacidad, no van a ser utilizados, esta matriz es la encargada de re-estructurar los streams iniciales en la mejor agrupación para los modos activos. Nótese que el concepto de adaptive modulation está implícito en este papel de la matriz de constelación. La segunda ocasión en la que esta matriz ha salido a escena es en los criterios de fairness, es decir, en los criterios mínimax. Esta matriz, de nuevo siguiendo ideas vinculadas a adaptive modulation, es la encargada de, sobre el mejor canal MIMO, distribuir los streams iniciales para que, de principio a final, sufran la misma degradación o mejora. La matriz de constelación, punto clave en el proceso temporal del transmisor, es la herramienta básica en el diseño de los códigos espacio-temporales que más adelante se presentarán.

Probablemente el mayor valor de lo descrito en el presente capítulo es la necesidad o lo deseable que resulta el diagonalizar, o intentar diagonalizar el canal, en el transmisor.

IV. – REFERENCIAS.

[1]xxxxx

APENDICE IV.A

La asignación de potencia en canales de comunicaciones con diversidad conlleva el uso de vectores que contienen variables positivas. Al ser todas las componentes positivas de los vectores a manejar, obviamente son susceptibles de una ordenación y el concepto matemático de mayorización o minorización resulta de interés en su diseño.

Imaginando un vector \underline{x} de componentes $x(i)$; $i=1,N$, se dice que el vector \underline{y} mayoriza el vector \underline{x} , si se cumple que:

$$\sum_{q=1}^m x(q) \geq \sum_{q=1}^m y(q) \quad \forall m = 1, N-1$$

con

(IV.A.1)

$$\sum_{q=1}^N x(q) = \sum_{q=1}^N y(q)$$

Y se denota como (IV.A.2).

$$\underline{x} \prec \underline{y} \quad \text{(IV.A.2)}$$

La noción de mayorización y minorización permite establecer dos conjuntos diferenciados de funciones. Su unión no es el universo de funciones ni su intersección es nula, pero casi todas las funciones de interés en problemas de power allocation caen una de las dos categorías. Los conjuntos de funciones se denominan Schur cóncava (S-Co) y Schur convexa (S-Cx). La definición es la que sigue:

$$f(.) \text{ Funcion } S-Ca$$

$$\text{si } \underline{x} \prec \underline{y} \text{ entonces } f(\underline{x}) \geq f(\underline{y})$$

$$f(.) \text{ Funcion } S-Cx$$

$$\text{si } \underline{x} \prec \underline{y} \text{ entonces } f(\underline{x}) \leq f(\underline{y})$$
(IV.A.3)

Un detalle a destacar es que el vector con todas sus componentes iguales, la solución UPA en términos de power allocation, minoriza cualquier otro vector, por lo tanto:

$$\text{como } \underline{1} \prec \underline{x} \quad \forall \underline{x}$$

$$\text{entonces}$$

$$f_{S-Ca}(\underline{1}) \geq f_{S-Ca}(\underline{x})$$

$$\text{y}$$

$$f_{S-Cx}(\underline{1}) \leq f_{S-Cx}(\underline{x})$$
(IV.A.4)

Es decir, la solución UPA es el máximo para funciones S-Ca y el mínimo para funciones S-Cx. Sobre todo esta ultima es de interés en los problemas de tipo maximin

ya que esta es una función S-Cx. Probablemente en esta base formal hay de buscarse la magia de UPA en muchos planteamientos de diseño.

Una propiedad que sin duda es de interés en problemas MIMO es recordar que, dada una matriz definida positiva, el vector de autovalores siempre mayoriza el vector que contiene los valores de su diagonal principal.

APENDICE IV.B.

En general, el diseño MIMO se enfrenta a problemas que pueden formularse como la búsqueda del extremo de una función, sujeta a dos tipos de restricciones. Un conjunto de restricciones establece fronteras al recinto de soluciones posibles, el segundo conjunto establece restricciones de igualdad. A nivel de formulación, el problema que se describe puede establecerse según (IV.B.1).

$$\begin{aligned} \min_{\underline{x}} (f_0(\underline{x})) \\ \text{sujeto a:} \\ f_i(\underline{x}) \leq 0 \quad i = 1, m \\ h_j(\underline{x}) = 0 \quad j = 1, k \end{aligned} \quad (\text{IV.B.1})$$

El Lagrangiano de este problema de minimización con restricciones vendría dado por:

$$L(\underline{x}, \underline{\mathbf{l}}, \underline{\mathbf{m}}) = f_0(\underline{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{l}(i) \cdot f_i(\underline{x}) + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}(j) \cdot h_j(\underline{x}) \quad (\text{IV.B.2})$$

Es obvio que el Lagrangiano es una función convexa en los multiplicadores.

La idea es, en vez de buscar el extremo inferior de la función con restricciones, buscar el extremo inferior del Lagrangiano. Si se define la función $g(\cdot, \cdot)$, denominada función dual, como indica (IV.B.3), se podrá establecer (IV.B.4)

$$g(\underline{\mathbf{l}}, \underline{\mathbf{m}}) = \inf_{\underline{x}} [L(\underline{x}, \underline{\mathbf{l}}, \underline{\mathbf{m}})] \quad (\text{IV.B.3})$$

$$f_0(\underline{x}) \geq L(\underline{x}, \underline{\mathbf{l}}, \underline{\mathbf{m}}) \geq g(\underline{\mathbf{l}}, \underline{\mathbf{m}}) \quad (\text{IV.B.4})$$

Es decir que el mínimo del problema original esta acotado por el máximo de la función dual.

$$\min_{\underline{x}} (f_0(\underline{x})) \geq \max_{\underline{\mathbf{l}}, \underline{\mathbf{m}}} g(\underline{\mathbf{l}}, \underline{\mathbf{m}}) \quad (\text{IV.B.5})$$

Así pues, buscando el máximo de la función dual en las variables duales o multiplicadores tendremos una cota del mínimo de la función original. A la diferencia entre ambos valores se le denomina duality gap. El salto o gap es cero si se verifican las denominadas condiciones KKT y que son las que siguen:

$$\mathbf{I}(i) \cdot f_i(\underline{x}_{opt}) = 0$$

$$h_j(\underline{x}_{opt}) = 0$$

$$\mathbf{I}(i) \geq 0$$

$$\nabla_{\underline{x}, \underline{\lambda}} L = \underline{0}$$

(IV.B.6)
