

## **CAPITULO II: UN SIMBOLO SOBRE CANAL FLAT FADING**



**Miguel Ángel Lagunas, Ana I. Pérez-Neira**

## **CAPITULO II: UN SIMBOLO SOBRE CANAL FLAT FADING.**

<b>II.1. EL DETECTOR ML.....</b>	<b>2.3</b>
<b>II.2. CSI COMPLETO EN TRANSMISION.....</b>	<b>2.5</b>
<b>II.3 DETECCION INSTANTANEA.....</b>	<b>2.7</b>
<b>II.4 TRANSMISION SIN CSI.....</b>	<b>2.8</b>
<b>II.5 COMPARACION CON Y SIN CSI.....</b>	<b>2.11</b>
<b>II.6 RESUMEN.....</b>	<b>2.12</b>
<b>II.7 REFERENCIAS.....</b>	<b>2.12</b>

## II.1 EL DETECTOR ML.

Este capítulo abordará la transmisión de un símbolo  $s(n)$ , perteneciente a una constelación de  $n_s$  bits, sobre un canal MIMO flat fading o no selectivo en frecuencia.

Considerando la señal transmitida como el producto de  $s(n)$  por la matriz  $\underline{\underline{B}}$  del transmisor, se trata de diseñar el receptor óptimo para recuperar en recepción el símbolo transmitido con la menor tasa de error. Nótese que el número de filas de la matriz del transmisor mencionada debe coincidir con el número de antenas transmisoras disponibles  $n_T$ . El número de columnas, que denominaremos  $N$ , implica que se utilizan  $N$  accesos al canal para hacer llegar el símbolo al receptor. Obviamente, este modo de proceder implica que a mayor  $N$  mayor será la calidad o SNR del sistema, pero a costa de un uso ineficiente del canal ya que se transmite un símbolo en  $N$  accesos.

El esquema del sistema a estudiar será el que se presenta en la figura II.1.

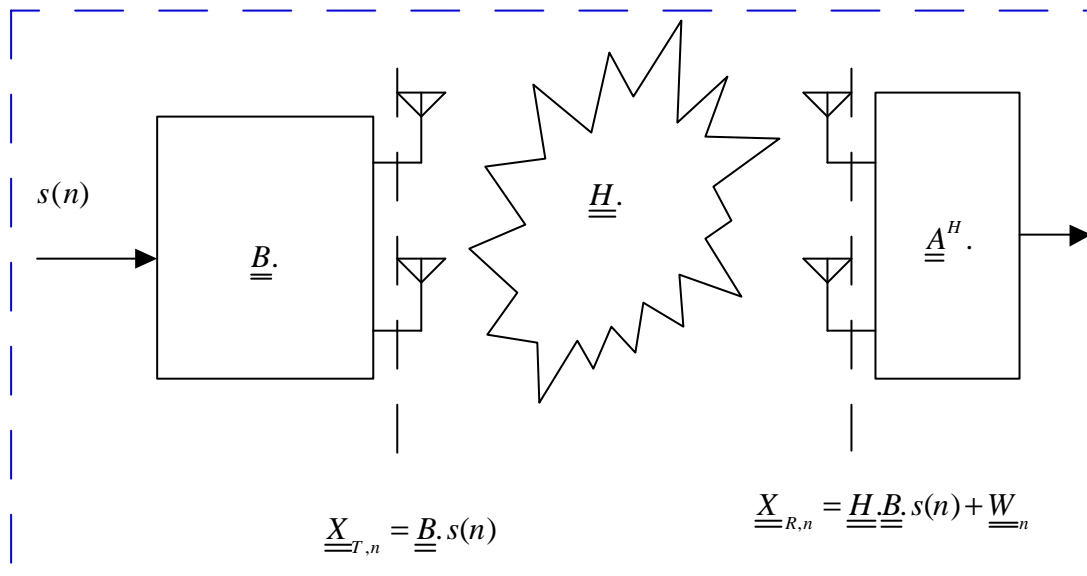


Figura II.1. Esquema del sistema bajo estudio.

Claramente la señal transmitida, correspondiente al símbolo de información, constará de  $N$  snapshots que agrupados forman la matriz transmitida.

$$\underline{\underline{X}}_{T,n} = \underline{\underline{B}}.s(n) \quad (\text{II.1})$$

La energía transmitida sería (II.2) donde la raíz cuadrada de  $E_s$  es la distancia de la constelación M-QAM a la que pertenece el símbolo transmitido.

$$E_T = \text{traza}(\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{B}}^H).E(|s(n)|^2) = \frac{E_s}{3.(2^{n_s} - 1)}.\text{traza}(\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{B}}^H) \quad (\text{II.2})$$

En el receptor, la matriz recibida estará formada por la transmitida después de pasar el canal MIMO más el ruido.

$$\underline{\underline{X}}_{R,n} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot s(n) + \underline{\underline{W}}_n \quad (\text{II.3})$$

Donde cada una de las entradas de la matriz ruido es compleja con parte real y parte imaginaria de media nula y potencia igual a  $N_0/2$ .

La verosimilitud de un símbolo  $s(n)$  será la siguiente:

$$\begin{aligned} \Lambda(s(n)) &= -\left| \underline{\underline{X}}_{R,n} - \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot s(n) \right|_F^2 = \\ &= -\text{Traza} \left[ \left( \underline{\underline{X}}_{R,n} - \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot s(n) \right) \cdot \left( \underline{\underline{X}}_{R,n} - \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot s(n) \right)^H \right] = \\ &\rightarrow 2 \cdot \text{Re} \left[ s(n)^* \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right) \right] - |s(n)|^2 \cdot \text{Traza} \left[ \underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

La ecuación anterior revela que el receptor queda definido por la única operación que la likelihood requiere de los datos.

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \quad (\text{II.5})$$

Nótese que el segundo termino, salvo el caso de una modulación de envolvente constante es relevante para calcular la verosimilitud de cada símbolo. De momento, se continuara la presentación para el caso general. La decisión correcta del símbolo  $s(n)$  implicara que su verosimilitud es mayor de la del resto de símbolos de la constelación.

$$\text{si } \Lambda(s(n)) > \Lambda(s(m)) \quad \forall m \neq n \quad \text{decide } s(n) \quad (\text{II.6})$$

Claramente si el símbolo correcto es  $s(n)$ , es decir si la matriz recibida es (II.3), entonces (II.6) ha de verificarse. Puede comprobarse que la transmisión de  $s(n)$  implica en (II.6) que se verifique (II.7), donde  $\tilde{s}(n)$  es la diferencia entre el símbolo correcto y  $s(m)$ .

$$\text{Traza} \left[ \left( \underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \right) \cdot |\tilde{s}(n)|^2 \right] > 2 \cdot \text{Re} \left[ \tilde{s}(n) \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{W}}_n^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \right) \right] \quad (\text{II.7})$$

Al considerar que el error solo se producirá a los símbolos más próximos en la constelación, es fácil comprobar que el término de la derecha se reduce a:

$$\mathbf{g} = 4 \cdot E_s \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \right) \quad (\text{II.8})$$

Respecto al término de la derecha, es una variable aleatoria gaussiana, de media nula y varianza igual a cuatro por el cuadrado de la expresión anterior por la del ruido. Con todo ello, en la figura II.2 puede verse que la probabilidad de un error viene dada por la expresión siguiente:

$$\Pr(s(n) \rightarrow s(m)) = P_e = Q \left( \sqrt{\frac{\mathbf{g}}{2 \cdot N_0}} \right) \quad (\text{II.9})$$

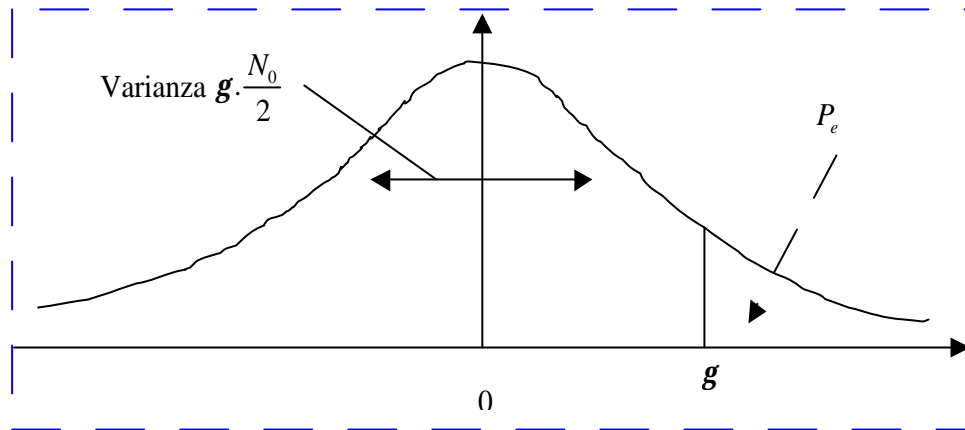


Figura II.2. Probabilidad de error en el detector ML.

Esta última expresión revela que el proceso del transmisor óptimo será aquel que maximice la traza que tiene la expresión del umbral. En definitiva, el diseño óptimo será aquel que maximiza el umbral con restricción de la energía transmitida. En definitiva se tendrá (II.10) después de usar la circularidad del operador traza.

$$4E_s \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H \right) \Big|_{MAX} \quad (II.10)$$

$$k_0 \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H \right) = E_T$$

Lo que completa el diseño del sistema ya que el receptor va adaptado a canal y transmisor.

## II.2 CSI COMPLETO EN TRANSMISION.

El presente apartado describirá la solución para el diseño del transmisor cuando este dispone de CSI perfecto. Antes de proseguir y a partir de este momento, el producto de la matriz de canal transpuesta por la del canal se denotara como una sola matriz.

$$\underline{\underline{R}}_H = \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \quad (II.11)$$

La maximización de la traza de la ecuación (II.10) es sencilla si se tiene presente la propiedad siguiente:

$$\text{Traza} \left( \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \right) \leq \lambda_{\max} \left( \underline{\underline{A}} \right) \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{B}} \right) \quad (II.12)$$

$$\text{Igualdad si } \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{e}}_{\max} \cdot \underline{\underline{g}}^H \quad \forall \underline{\underline{g}} (N,1)$$

Es decir, la traza a maximizar se hace máxima cuando el procesador espacio temporal es una matriz de rango uno y esta formada, a la izquierda por el autovector máximo de la matriz de canal, y a la derecha, por cualquier vector de dimensión N para cumplir la premisa de N accesos al canal que revisaremos mas adelante.

Así pues la expresión del umbral será:

$$\underline{\underline{g}} = E_s \cdot \text{Traza}(\underline{\underline{R}}_H \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H) = E_s \cdot \mathbf{I}_{\max}(\underline{\underline{R}}_H) \cdot \text{Traza}(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H) \quad (\text{II.13})$$

Esta expresión, usando la restricción de energía transmitida, pasa a ser:

$$\underline{\underline{g}} = E_T \cdot \mathbf{I}_{\max}(\underline{\underline{R}}_H) \cdot \left( \frac{3}{(2^{n_s} - 1)} \right) \quad (\text{II.14})$$

Y la tasa de error vendría dada por (II.15.a) o la cota de Chernoff (II.15.b) muy próxima para SNR razonables.

$$P_e = Q \left( \sqrt{\frac{2 \cdot E_T}{N_0} \cdot \mathbf{I}_{\max}(\underline{\underline{R}}_H) \cdot \left( \frac{3}{(2^{n_s} - 1)} \right)} \right) \quad (\text{II.15.a})$$

$$P_e = k_1 \cdot \exp \left[ -\frac{2 \cdot E_T}{N_0} \cdot \mathbf{I}_{\max}(\underline{\underline{R}}_H) \cdot \frac{3}{2^{n_s} - 1} \right]$$

Varios detalles son interesantes de la expresión anterior. En primer lugar nótese que la ganancia proporcionada por el canal MIMO viene dada por el autovalor máximo de la matriz del canal. En segundo lugar, y considerando una constelación QAM, la forma tan desfavorable en que actúa el número de bits o streams  $n_s$  en la SNR efectiva.

También es interesante la estructura de tanto el transmisor como el receptor.

$$\underline{\underline{B}} = k_1 \cdot \underline{\underline{e}}_{\max} \cdot \underline{\underline{g}}^H \quad (\text{II.16})$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} = \mathbf{I}_{\max}^{1/2} \cdot \underline{\underline{v}}_{\max} \cdot \underline{\underline{g}}^H$$

Es decir, ambos procesadores son de rango uno y su primera componente es el autovector de la matriz  $\underline{\underline{H}}$  por la derecha y por la izquierda para transmisor y receptor respectivamente. La constante  $k_1$  ajusta la energía transmitida al valor correspondiente.

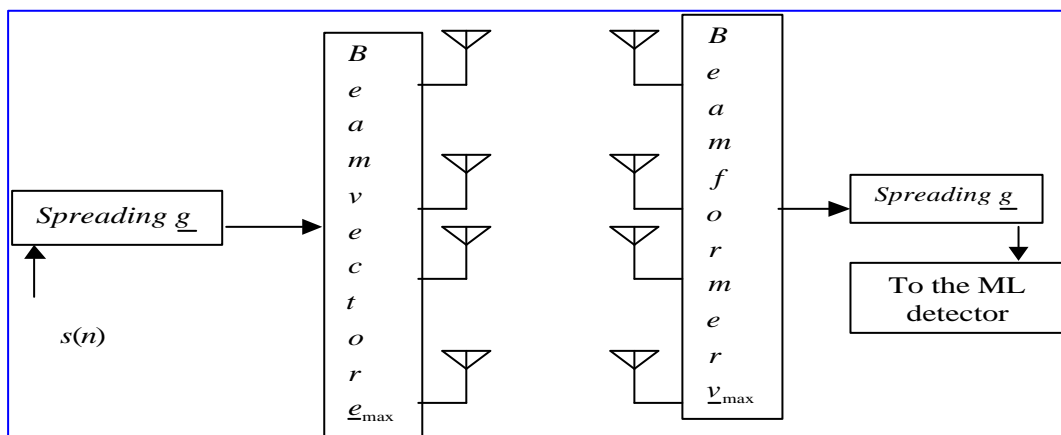


Figura II.3. Tx-Rx Optimo para full-CSI en Tx y canal flat fading.

Queda ahora por discernir el papel del segundo vector de longitud  $N$ . El vector, en su implementación es el equivalente al empleo de una secuencia de spreading o ensanchamiento del símbolo original. Es decir, la recompensa de usar  $N$  accesos, en lugar de uno solo y ser un sistema full-rate, i.e. un símbolo complejo por acceso al canal, es dar acceso a otros usuarios con secuencias de spreading (CDMA sincrónico) o bien seguridad en la transmisión. En cualquier caso, siempre que no se requieran estas ventajas el sistema puede trabajar en modo full-rate simplemente sustituyendo dicho vector por la unidad.

En cualquier caso, nótese que la solución óptima para el problema planteado en el apartado es básicamente un procesador temporal de elección para el diseñador, seguido de un conformador que es igual al autovector máximo por la derecha de la matriz del canal MIMO.

El esquema general del sistema de transmisión puede verse en la Figura II.3.

### II.3 DETECCION INSTANTANEA.

El apartado anterior ha descrito el detector ML junto con el diseño completo de transmisor y receptor. Al escribir la verosimilitud o likelihood de un símbolo, aparecían dos términos que se repiten a continuación.

$$\Lambda(s(n)) = 2 \cdot \text{Re} \left[ s(n)^* \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right) \right] - |s(n)|^2 \cdot \text{Traza} \left[ \underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \right]$$

Sobre esta expresión el receptor ha de buscar que símbolo de la constelación tiene el valor más elevado y decidir que este ha sido el símbolo transmitido. No obstante, un análisis detallado revela que la búsqueda puede simplificarse mucho para constelaciones del tipo de la considerada M-QAM. Mas aun, en el caso de QPSK, al ser de envolvente constante el segundo término no es relevante para la likelihood y el detector pasa a ser simplemente (II.17) para decidir los dos bits de esta constelación.

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[ \text{Traza} \left( \underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right) \right] &> 0 \\ \text{Im} \left[ \text{Traza} \left( \underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right) \right] &< 0 \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Aunque en este caso la reducción del detector óptimo a un detector instantáneo es trivial, podrá verse que otros escenarios y técnicas de proceso no permitirán esta simplificación, sobre todo en lo que se refiere a umbrales cero, es decir, sin necesidad de control automático de ganancia (CAG) en el receptor.

Esta detección instantánea ha sido posible gracias a que, al disponer de CSI perfecto en el transmisor, se trabaja sobre el mejor modo del canal con lo que, a pesar de disponer de múltiples canales, en número igual a  $\min(n_T, n_R)$ , tan solo se trabaja con uno. Estos modos del canal, los autovectores en Tx y Rx, permiten trabajar sobre canales SISO y libres de ISI, y esta es la razón por la que puede implementarse un detector instantáneo manteniendo su carácter óptimo.

Al mismo tiempo, la estructura de transmisor y receptor para un solo símbolo, revela que con  $N$  accesos y usando secuencias de Spreading ortogonales pueden multiplexarse en código hasta  $N$  usuarios. Es mas, a costa de la degradación paulatina que presentan el resto de modos, autovalores inferiores al máximo y por lo tanto canales SISO de menor ganancia, puede usarse  $N$  streams de símbolos por cada uno de los modos del canal. El problema es que su peor ganancia obligara a reducir tamaño de la constelación (modulación adaptativa) o a equalizar, a costa de incrementar la potencia transmitida en esos modos si se desea mantener la tasa de error constante en cada modo utilizado. Sobre estas nociones se volverá mas adelante cuando se aborde el problema de transmisión de múltiples streams.

#### II.4. TRANSMISION SIN CSI.

En el caso de no disponer de CSI en el receptor, la maximización con restricciones a llevar a cabo en el diseño del transmisor se complica. Se reproduce a continuación las ecuaciones de diseño.

$$4E_s \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H \right) \Big|_{MAX}$$

$$k_0 \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H \right) = E_T$$

Obviamente la maximización parece carecer de sentido si no se conoce la matriz del canal.

Una posibilidad es enfocar el problema de transmisión como un juego de dos jugadores. Por un lado un jugador seria el diseñador, empeñado en maximizar la traza anterior; por otro lado, estaría el canal este persiguiendo en todo momento en cada jugada disminuir la traza. Es decir, el premio en el juego es la traza para ambos. Al establecer la competición se han de fijar reglas para cada uno de los dos jugadores. La limitación del diseñador es que el persigue el premio pero con un limite en la energía transmitida disponible. En el caso del segundo jugador, el canal, la restricción en su jugada no es clara.

En las restricciones a la jugada del canal se le pueden imponer varias restricciones. Tal vez las más adaptadas a la realidad serian una de las dos siguientes:

$$\text{Traza} \left( \underline{\underline{R}}_H \right) \geq \mathbf{r} \quad (\text{II.18.a})$$

$$\mathbf{I}_{\min} \left( \underline{\underline{R}}_H \right) \geq \mathbf{J} \quad (\text{II.18.b})$$

Cualquiera de las dos restricciones seria valida y le impediría al jugador, al hacer cero la matriz la garantía de ganar el juego contra cualquier otro jugador.

Tomando la restricción de la traza, seleccionaremos un juego sencillo de tan solo una jugada por jugador. De este modo, el canal juega el primero y después juega el diseñador, conociendo la jugada del canal. Así pues en la primera jugada el canal hace mínima la traza, dentro de sus posibilidades, es decir, con la restricción de su traza.



$$\begin{aligned} \min_H & \left[ \text{Traza} \left( \underline{\underline{R}}_H \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H \right) \right] \\ \text{sujeto a} & \text{Traza} \left( \underline{\underline{R}}_H \right) \geq \mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

La minimización anterior es sencilla si se tiene en cuenta la siguiente propiedad:

$$\text{Traza} \left( \underline{\underline{R}}_H \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H \right) \geq \mathbf{I}_{\min} \left( \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H \right) \cdot \text{Traza} \left( \underline{\underline{R}}_H \right) \quad (\text{II.20})$$

Después de esta jugada el diseñador trata de maximizar la derecha de esta última expresión. La solución es sencilla pues al buscar el máximo del autovalor mínimo de una matriz, con restricción en su traza o suma de autovalores, la solución es todos iguales. En definitiva la solución es:

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\Pi}} \quad \text{con} \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{\Pi}}^H = \underline{\underline{I}}_{n_T} \quad (\text{II.21})$$

Donde la matriz  $\underline{\underline{\Pi}}$  es una matriz unitaria.

Varios detalles de la solución anterior son interesantes. En primer lugar nótese que con las reglas del juego, i.e. restricciones y a una sola jugada, el juego no es más que un proceso de los denominados mini-max. Mínimo según el canal o caso peor y máximo para el diseño del transmisor. En segundo lugar, nótese algo que va a ser una constante, cuando no se dispone de CSI la mejor solución es potencia uniforme a todos los modos del canal (matriz identidad), que suele denominarse como UPA (Uniform Power Allocation). En tercer lugar, para construir la matriz unidad de dimensión  $n_T$  no hay otro remedio que realizar, como mínimo el mismo número de accesos al canal ( $N = n_T$ ); con lo que parece estar condenado a una rate baja. Respecto a este último comentario se vera que no es correcto en el sentido de que se pueden simultanear varios símbolos siempre que se empleen matrices en el transmisor adecuadas.

Por ejemplo, para transmitir simultáneamente dos símbolos  $s_1(n)$  y  $s_2(n)$ , ambos reales, con matrices de proceso espacio temporal  $\underline{\underline{\Pi}}_1$  y  $\underline{\underline{\Pi}}_2$  respectivamente, siempre que se verifique que:

$$\underline{\underline{\Pi}}_1 \cdot \underline{\underline{\Pi}}_2^H = -\underline{\underline{\Pi}}_2 \cdot \underline{\underline{\Pi}}_1^H \quad (\text{II.21})$$

La razón de esta condición, que es básicamente una condición para no tener ISI entre los dos símbolos, es que dado que el receptor para cada uno de los símbolos será:

$$\begin{aligned} \hat{s}_1(n) &= \text{Re} \left[ \text{Traza} \left( \underline{\underline{\Pi}}_1^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right) \right] \\ \hat{s}_2(n) &= \text{Re} \left[ \text{Traza} \left( \underline{\underline{\Pi}}_2^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Claramente se garantiza (II.23), que permite recuperar perfectamente cada símbolo sin interferencia del otro.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left[ \operatorname{Traza} \left( \underline{\underline{\Pi}}_1^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\Pi}}_2 \right) \right] &= \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Traza} \left( \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\Pi}}_2 \cdot \underline{\underline{\Pi}}_1^H \right) \right] = \\
&= -\operatorname{Re} \left[ \operatorname{Traza} \left( \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\Pi}}_1 \cdot \underline{\underline{\Pi}}_2^H \right) \right] \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{Igual a} \\ \text{la partereal} \\ \text{del conjugado} \end{array} \right| = \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Traza} \left( \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\Pi}}_1 \cdot \underline{\underline{\Pi}}_2^H \right) \right]
\end{aligned} \tag{II.23}$$

La unica posibilidad es que sea = 0

La propiedad (II.21) es una propiedad mucho menos exigente que la ortogonalidad de las matrices lo que brinda muchas mas posibilidades a la hora de su búsqueda. De hecho esta propiedad se denomina de matrices “amigables”.

Análogamente se pueden transmitir dos símbolos complejos y detectar los cuatro símbolos reales  $s_1(n)$ ,  $s_2(n)$ ,  $s_3(n)$  y  $s_4(n)$  si se verifica que:

$$\underline{\underline{\Pi}}_3 \cdot \underline{\underline{\Pi}}_4^H = \underline{\underline{\Pi}}_3 \cdot \underline{\underline{\Pi}}_4^H \tag{II.24}$$

De este modo, la señal transmitida seria la que se indica en (II.25) y el detector correspondiente, lo que revela que, aunque cada símbolo ocupa múltiples accesos al canal el sistema puede convertirse en full-rate usando matrices amigables en numero igual al numero de accesos, que será igual al de antenas transmisoras.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{X}}_{T,n} &= \underline{\underline{\Pi}}_1 s_1(n) + \underline{\underline{\Pi}}_2 s_2(n) + j \underline{\underline{\Pi}}_3 s_3(n) + \underline{\underline{\Pi}}_4 s_4(n) \\
\hat{s}_1(n) &= \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Traza} \left( \underline{\underline{\Pi}}_1^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right) \right] \\
\hat{s}_2(n) &= \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Traza} \left( \underline{\underline{\Pi}}_2^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right) \right] \\
\hat{s}_3(n) &= \operatorname{Im} \left[ \operatorname{Traza} \left( \underline{\underline{\Pi}}_3^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right) \right] \\
\hat{s}_4(n) &= \operatorname{Im} \left[ \operatorname{Traza} \left( \underline{\underline{\Pi}}_4^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{X}}_{R,n} \right) \right]
\end{aligned} \tag{II.25}$$

Sobre este punto se volverá a insistir en el diseño de códigos espacio-temporales, donde las entradas de las matrices amigables serán de un alfabeto restringido.

Volviendo al caso de un solo símbolo, dos ejemplos tradicionales o muy usados para la matriz del transmisor son la matriz identidad y la matriz de la DFT. El esquema resultante de la primera elección se le denomina delay-diversity por razón de que el mismo símbolo se envía a diferentes antenas en cada acceso. Bajo el segundo esquema el lector encontrara su similitud con modulaciones FDSS o de diversidad en frecuencia, similares a OFDM pero con el mismo símbolo en cada portadora.

Por ultimo, es interesante volver al juego cuando al canal se le cambia la restricción en su jugada a la del autovalor mínimo. En este caso, la jugada del canal producirá:

$$\text{Traza}(\underline{\underline{R}}_H \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H) \geq \mathbf{I}_{\min}(\underline{\underline{R}}_H) \cdot \text{Traza}(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H)$$

Con lo que el transmisor se limita a aportar su potencia transmitida sin más. Lo interesante es que si en vez de restringir la energía total transmitida, se restringe la potencia máxima por antena, entonces de nuevo la solución sería idéntica al caso anterior. Es por esta razón que se habla de que la solución de diseño para el caso de no CSI siempre conduce, de una manera u otra a UPA.

## II. 5 COMPARACION CON Y SIN CSI.

Es intuitivo que la ausencia de CSI tendrá repercusión en la calidad de la detección. Habiendo quedado claro que en ambos casos el receptor óptimo puede implementarse de forma instantánea, sin busca sobre la constelación transmitida, queda por examinar el coste que conlleva la reducción de complejidad asociada a no disponer de CSI.

Teniendo en cuenta que la matriz de proceso, cuando no se dispone de CSI, es orthonormal, la restricción de energía transmitida implica que:

$$\text{Traza}(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H) = k_2 \quad \text{tal que} \quad k_2 \cdot E_s \cdot \frac{2^{n_s} - 1}{3} = E_T \quad (\text{II.26})$$

Con lo que; la matriz de proceso será:

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \sqrt{\frac{k_2}{n_T}} \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = 4E_s \cdot \text{Traza}(\underline{\underline{R}}_H \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^H) = \frac{4 \cdot E_s \cdot k_2}{n_T} \cdot \text{Traza}(\underline{\underline{R}}_H) \quad (\text{II.27})$$

Y la tasa de error asociada al sistema sin CSI igual a:

$$P_e^{NO-CSI} = Q \left( \sqrt{\frac{2 \cdot E_T}{N_0} \cdot \left( \frac{\text{Traza}(\underline{\underline{R}}_H)}{n_T} \right) \cdot \left( \frac{3}{(2^{n_s} - 1)} \right)} \right) \quad (\text{II.28})$$

En esta última expresión puede apreciarse la diferencia con respecto a la probabilidad de error con CSI, que se reproduce a continuación.

$$P_e^{CSI} = Q \left( \sqrt{\frac{2 \cdot E_T}{N_0} \cdot \mathbf{I}_{\max}(\underline{\underline{R}}_H) \cdot \left( \frac{3}{(2^{n_s} - 1)} \right)} \right) \quad (\text{II.29})$$

El efecto es que se pasa de disponer del mejor canal a disponer del canal promedio de valor siempre inferior al máximo. Solo en dos situaciones el CSI no es relevante al transmisor desde esta perspectiva que comentaremos a continuación. Cuando el canal es de rango uno, lo que equivale a un sistema que se comporta como MISO o SIMO. Dicho de otro modo, el CSI resulta irrelevante cuando uno de los dos terminales no dispone de diversidad. La segunda ocasión es cuando la matriz del canal

es orthonormal y todos sus valores son idénticos, de nuevo en este caso no existe ISI y no se requiere el quitarla en transmisión. En el resto de situaciones el CSI reportara una mayor ganancia en BER con respecto a su ausencia en transmisión.

## **II.6. RESUMEN.**

En el presente capítulo se ha descrito el sistema de un solo símbolo sobre canal flat fading. La presentación ha comenzado introduciendo el detector óptimo para un solo símbolo transmitido con N accesos al canal MIMO. El detector óptimo ha permitido identificar que la probabilidad de error esta controlada por la traza del producto entre canal y procesador espacio tiempo del transmisor.

A partir de la expresión de la probabilidad de error se ha desarrollado el diseño del transmisor para los casos de CSI disponible y sin CSI. En el primer caso, la solución consiste en diagonalizar el canal y trabajar únicamente sobre el mejor eigenmode del canal. El procesador es de rango uno con una separación nítida entre procesador temporal y espacial. El procesador temporal puede ser visto como un proceso de Spreading mientras que el espacial se reduce a un conformador tradicional que toma la expresión del autovector del canal asociado al autovalor máximo.

Se ha mostrado brevemente que, aunque el capítulo aborda la problemática de un solo símbolo, tanto con CSI como sin CSI, existe la posibilidad de proveer de acceso a otros usuarios. Este acceso puede realizarse, en el caso de CSI, vía el uso de eigenmodes de menor ganancia (menor autovalor) o vía la utilización de secuencias de Spreading diferentes a modo de CDMA sincrónico.

En el caso de no CSI el procesador es de rango completo, es decir, usa todos los eigenmodes al no saber cual es el mejor a priori como en el caso de CSI. El acceso depende ahora de la utilización de matrices amigables de proceso para los diferentes usuarios.

En términos de tasa de error, mientras que en el caso de CSI es el autovalor máximo de la matriz de canal, cuando no se dispone de CSI se puede utilizar el promedio de todos y en esta diferencia están las pérdidas que conlleva el no disponer de CSI en el transmisor.

## **II.7. REFERENCIAS.**

[1] A.