

# **ARRAY PROCESSING I: BEAMFORMING Y ESTIMACION DE DIRECCION DE LLEGADA**



## CAPITULO I. INTRODUCCION

- I.1 DIVERSIDAD TEMPORAL Y ESPACIAL
- I.2 SEÑAL DE FUENTE Y SEÑAL DE SENSOR
- I.3 BANDA ANCHA Y BANDA ESTRECHA
- I.4 MODELO DE SEÑAL DE APERTURA: SNAPSHOT
- I.5 MATRIZ DE COVARIANZA
- I.6 PROMEDIADO ESPACIAL
- I.7 CONCLUSIONES
- I.8 REFERENCIAS

## CAPITULO II. CONFORMACION DE HAZ

- II.1 VECTOR DE HAZ Y CONFORMACION DE HAZ
- II.2 ÓPTIMO POR REFERENCIA TEMPORAL
  - II.2.1. REDUCCION A SISTEMAS CON REFERENCIA TEMPORAL
  - II.2.2. RESPUESTA ESPACIAL DEL CONFORMADOR ÓPTIMO
  - II.2.3. RELACION SEÑAL A RUIDO
  - II.2.4. ENTRAMADO DE LA REFERENCIA
  - II.2.5. RESUMEN DE SISTEMAS TRB
- II.3 ÓPTIMO POR REFERENCIA ESPACIAL
  - II.3.1. CONFORMACION DE HAZ CON RESTRICCIONES
  - II.3.2. EL CANCELADOR DE LOBULO LATERAL SLC.
  - II.3.3. EL CANCELADOR DE LOBULO LATERAL GENERALIZADO GSLC
    - II.3.3.1 FUNCIONAMIENTO DEL GSLC Y MATRIZ DE BLOQUEO
    - II.3.3.2. GSLC CON CONTROL DE QUIESCENT
- II.4 SISTEMAS CON RESTAURACION DE PROPIEDADES
  - II.4.1. REFERENCIA POR CONSTELACION
  - II.4.2. ECUALIZADOR MAS CONFORMADOR
  - II.4.3. CONFORMADOR MDIR
  - II.4.4. CONFORMACION POR PREDICCION EXACTA
  - II.4.5. REFERENCIA POR CICLOESTACIONARIDAD
- II.5 SISTEMAS DE REFERENCIA POR CODIGO
  - II.5.1. PROCESADOR ANTICIPADO PARA FHSS
  - II.5.2. CONFORMADOR PARA FDSS
  - II.5.3. CONFORMACION EN SISTEMAS DSSS
- II.6. CONCLUSIONES
- II.7 REFERENCIAS

## CAPITULO III. ESTIMACION DE ANGULO DE LLEGADA.

- III.1. EL PROBLEMA DE ESTIMACION DE DOA Y ALTERNATIVAS BASICAS.
- III.2. ESTIMACION DE DOA EN BANDA ANCHA.
  - III.2.1. REDUCCION A PROBLEMAS DE BANDA ESTRECHA.
  - III.2.2. PROMEDIADO FRECUENCIAL
  - III.2.3. FOCALIZACION
  - III.2.4. FOCALIZACION PARA ULA.
- III.3. PHASED ARRAY (PA)
  - III.4 EXPLORACION INDEPENDIENTE DE LOS DATOD (MLM Y NMLM)
- III.5 PREDICCION LINEAL (LP).
- III.6 METODOS SVD (MUSIC)
  - III.6.1. REDUCCION AL SUBESPACIO DE RUIDO
  - III.6.2. RUIDO COLOREADO.
- III.7 PREDICCION ESPACIAL: ESPRIT
- III.8 ESTIMACION DE DOA DE MAXIMA VEROSIMILITUD
- III.9 EL ALGORITMO EM
- III.10 METODOS DE BLOQUEO
- III.11 CONCLUSIONES
- III.12 REFERENCIAS

CAPITULO IV. DIVERSIDAD EN TRANSMISION. PROCESADO ESPACIO TEMPORAL

IV.1 INTRODUCCION

IV.2 FILTROS TERMINALES OPTIMOS. CANAL FLAT FADING.

IV.3 CANAL MIMO SELECTIVO EN FRECUENCIA: ANALISIS.

IV.4 FILTRO TERMINALES OPTIMOS CANAL MIMO SELECTIVO EN FRECUENCIA.

IV.5 DIVERSIDAD SOLO EN TRANSMISION: CANAL SELECTIVO Y DISEÑO ESCALABLE.

IV.6 MULTIPLE BEAMFORMING: SISTEMAS MULTIPORTADORA Y OFDM.

IV.7 SISTEMAS MULTIUSUARIO EN 3G.

IV.8 CODIGOS BLOQUE ESPACIO-TEMPORALES.

IV.9 CODIGOS CELOSIA ESPACIO-TEMPORALES.

IV.10 CODIGOS S-T DIFERENCIALES.

IV.11 CONCLUSIONES.

IV.12 REFERENCIAS.

# **CAPITULO I**

## **INTRODUCCION**

**I.1 DIVERSIDAD TEMPORAL Y ESPACIAL**

**I.2 SEÑAL DE FUENTE Y SEÑAL DE  
SENSOR**

**I.3 BANDA ANCHA Y BANDA ESTRECHA**

**I.4 MODELO DE SEÑAL DE APERTURA:  
SNAPSHOT**

**I.5 MATRIZ DE COVARIANZA**

**I.6 PROMEDIADO ESPACIAL**

**I.7 CONCLUSIONES**

**I.8 REFERENCIAS**

**I.9 EJERCICIOS**

## I.1 DIVERSIDAD TEMPORAL Y ESPACIAL

Todo proceso de filtrado, clasificación o selección requiere que el fenómeno físico bajo análisis permita extraer características al observador. Dichas características o etiquetas permiten, siempre que sean diversas para el colectivo de fenómenos a analizar, la clasificación o selección de este frente a otros fenómenos diferentes. Así pues, es necesario el recurrir a un proceso de extracción de características antes de intentar cualquier proceso de filtrado o reconocimiento.

Dado que todos los fenómenos de interés suelen firmar vía señales eléctricas, generadas por sensores que pasan de parámetros físicos a parámetros eléctricos la información correspondiente, una manera trivial de generar características, o dicho de otro modo, de generar diversidad a partir de una señal eléctrica  $x(t)$  es recurrir a sus muestras. De este modo, una diversidad de orden  $Q$  estaría formada por  $Q$  muestras, no necesariamente consecutivas de  $x(t)$ .

$$\begin{aligned}\underline{X}^T(t) &= [x(t-t_1), x(t-t_2), \dots, x(t-t_Q)] \\ \underline{X}^T(n) &= [x(n-n_1), x(n-n_2), \dots, x(n-n_Q)]\end{aligned}\quad (I.1)$$

El instante  $t$ , o  $n$  en discreto, en la expresión anterior, se toma como referencia de los vectores de diversidad que el procesador manejara. El superíndice  $T$  indica vector o matriz transpuesta.

Otra alternativa es, teniendo en cuenta que la diferencia finita o la derivada de orden  $Q$  manejan valores de diversidad temporal, formar la diversidad de orden  $Q$  a partir de las  $Q$  primeras derivadas o diferencias finitas de la señal. De este modo, (I.2) también constituiría una firma adecuada en diversidad de la señal  $x(t)$ .

$$\begin{aligned}\underline{X}^T(t) &= \left[ x(t), \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{Q-1}x}{dt^{Q-1}} \right] \\ \underline{X}^T(n) &= [x(n), \Delta x(n), \dots, \Delta^{Q-1}x(n)]\end{aligned}\quad (I.2)$$

Obviamente el uso de diferencias finitas se corresponde con la segunda versión de (I.1) para señales muestreadas.

Es de destacar que cualquier forma manera o tecnología de procesar, filtrar o clasificar pasa de un modo u otro por este proceso de firma de la señal. Mientras que en tecnología analógica la diversidad generada por componentes L-C esta constituida por derivadas (o integrales) de la señal de entrada, se examinara el caso discreto por estar más próximo al caso de procesado espacial.

Examinando la Figura I.1, se trata de la arquitectura de un FIR de  $Q$  coeficientes. Si se concentra la misión del FIR en extraer, de una mezcla de dos sinusoides, la señal de frecuencia mas baja, lo primero que se lleva a cabo es hacer firmar a la señal de entrada en el sistema de diversidad. Es decir, la primera capa genera un vector de diversidad  $\underline{X}_n$  donde se recogen  $Q$  muestras, ahora consecutivas por razones de viabilidad, de la señal de entrada. Note que la referencia de tiempo se denota en el subíndice del vector.

$$\underline{X}_n^T = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-Q+1)]^T \quad (I.3)$$

La segunda capa del selector o filtro, al observar la diversidad, se limita a privilegiar la firma de la señal de baja frecuencia y eliminar el resto de señales. En otras palabras, el conjunto de coeficientes de un FIR puede contemplarse como un proceso adaptado a la diversidad generada de tal modo que, si esta es adecuada, le permite extraer la señal deseada y atenuar el resto. En definitiva, la realización de un filtro no es ni más ni menos que el proceso de la diversidad correspondiente.

$$y(t) = \sum_{q=0}^{Q-1} a(q).x(t-q.T) \quad (I.4)$$

Esta visión, aparentemente artificial de un FIR, será de gran valor para comprender y asimilar otros tipos de diversidad y su correspondiente proceso. En concreto se pasara a revisar como seria un sistema en el que la diversidad, en lugar de generarse en tiempo, se genera en espacio.

En el caso de diversidad espacial, esta se genera en términos de tiempo de retardo, pero sigue adoptando el planteamiento que se realizo en (I.1).

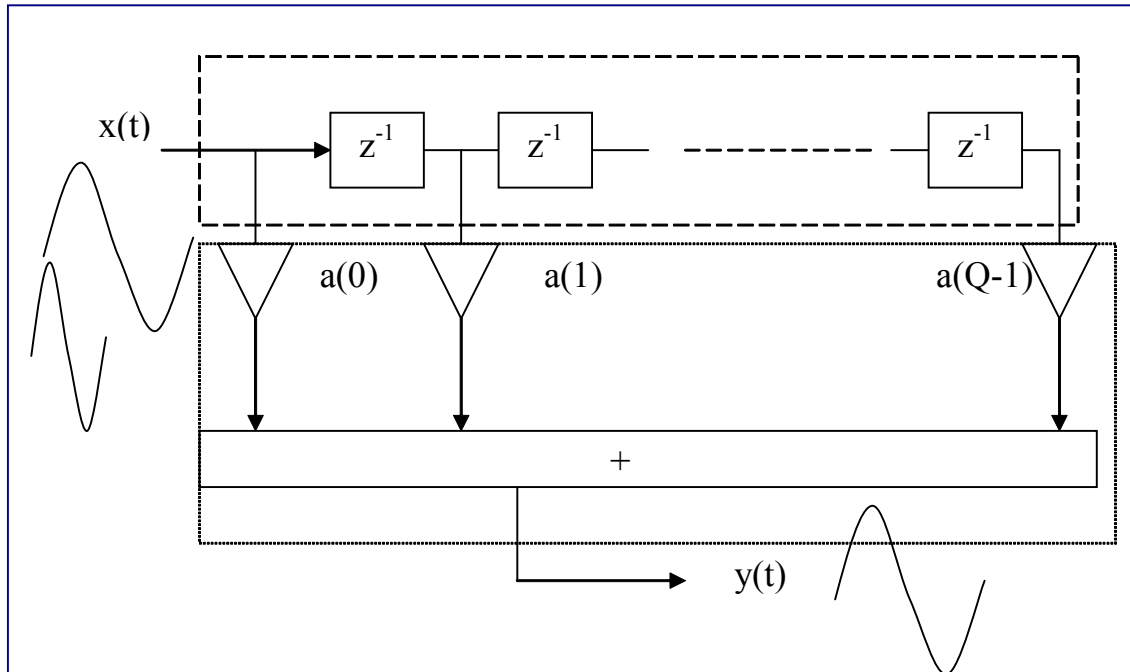


Figura I.1. Arquitectura de un filtro FIR de Q coeficientes como dos etapas: Generador de diversidad y Procesador de diversidad.

Para establecer una correspondencia directa con el caso de diversidad temporal, basta imaginar frentes de onda planos incidiendo sobre una apertura formada por sensores distribuidos linealmente y equi-espaciados (ULA array, Uniform Linear Array). Es claro que una fuente situada en un ángulo de cero grados de elevación, en la dirección perpendicular al array de sensores, provoca que la señal llegue en el mismo instante a todos los sensores. En otras palabras, tomando la amplitud recibida, para una fuente situada en este ángulo, la amplitud será la misma en todos los sensores teniendo como consecuencia que al dibujar dicha señal sobre el eje espacio esta aparezca como una constante o de muy baja frecuencia espacial. En términos de firma en la diversidad espacial, puede decirse que las fuentes de elevación, ángulo con respecto a la perpendicular a la apertura o array, baja firman como una señal de baja frecuencia espacial. Se ha de insistir en la palabra espacial, porque a nivel temporal la señal puede ser de frecuencia elevada o muy baja, siempre su posición en la perpendicular de la apertura la hace firmar como una fuente de baja frecuencia espacial. También a las fuentes situadas en esa posición se las denomina como rápidas pues son capaces de alcanzar todos los sensores al mismo tiempo.

Si ahora la fuente se encuentra en una elevación de  $45^\circ$ , cada sensor recibirá una amplitud que depende del tiempo de propagación entre un sensor y otro. Así pues, al cambiar el ángulo, no solo la posición de la fuente influye en la firma sobre la diversidad espacial sino también la frecuencia temporal de la fuente. Tal y como se muestra en la Figura I.2, fijada la frecuencia de la señal en  $f_0$ , en un instante dado la amplitud variara de un sensor a otro. En definitiva la frecuencia espacial ha aumentado. Este aumento es aun mayor si la fuente se acerca a una elevación del  $90^\circ$ . En esta situación el retardo entre la señal en cada sensor es máximo y se observara una mayor frecuencia espacial.

En definitiva, intuyendo que la frecuencia temporal de la señal influye, lo que sí se puede concluir es que la frecuencia espacial, con la que una fuente firma en el array de sensores cambia, y pasa de ser una frecuencia baja en ángulos próximos a  $0^\circ$  a frecuencias mayores a medida que se escora hacia ángulos de elevación mayores o próximos a los  $90^\circ$ . También ha de destacarse el impacto de la frecuencia que podría provocar que de nuevo la fuente apareciese espacialmente como una constante aunque no

estuviese en la perpendicular de la apertura. En el fondo, se esta ante un problema de muestreo en el que ocurre que cuando la frecuencia de la señal a muestrear es idéntica a la frecuencia de muestreo, la frecuencia aparente es cero. Es el fenómeno estroboscopia por el que una rueda girando a una velocidad pero iluminada a una pulsación aparece quieta o girando en sentido contrario (frecuencia negativa resultante del infra-muestreo).

El hecho de que la firma espacial dependa, de un modo u otro, de la posición de la fuente induce a pensar que, al igual que en un filtro FIR se seleccionan frecuencias, en una apertura se pueden seleccionar direcciones. Por esta razón, parece claro que el mismo sistema de proceso de diversidad aplicable en un filtro FIR puede ser utilizado ahora para seleccionar una dirección y atenuar las otras.

De entrada el problema parece similar, no obstante existen muchas diferencias entre un filtro temporal y lo que podría ser un filtro espacial. Sin entrar por el momento en mas detalles basta pensar que, en primer lugar, la posición de antenas o sensores no tiene porque ser uniforme. La distribución puede ser plana o espacial con lo que nuestras nociones de asociar muestreo uniforme a la diversidad habitual no serán correctas. La mayor parte de aperturas por calidad o restricciones físicas no serán ni lineales ni uniformes. En segundo lugar, nótese que la firma en la diversidad espacial depende de la firma en la diversidad temporal, es decir, cuanto más alta es la frecuencia de la señal recibida más sensible será la frecuencia espacial a la posición de la fuente. Dicho de otro modo, una frecuencia temporal alta implicara que pequeños retardos llevaran asociados grandes cambios en la amplitud. Aunque de aquí se pueda concluir que por esta razón las frecuencias temporales altas son más fáciles de resolver en espacio que las bajas no debe olvidarse que se esta en una diversidad generada por muestreo y que la ambigüedad debida al criterio de Nyquist también rige aquí. En resumen, procesado de arrays conlleva un análisis mucho más complejo que el diseño de filtros temporales. Que las dos diversidades están conectadas y no pueden manejarse independientemente es obvio. Además, el muestreo que se llevara a cabo es mucho más general de lo que el diseño de filtros temporales nos tiene acostumbrados. Estas facetas, entre otras, hacen del procesado de arrays el diseño mas sofisticado y a la vez atractivo en el ámbito de procesado de señal.

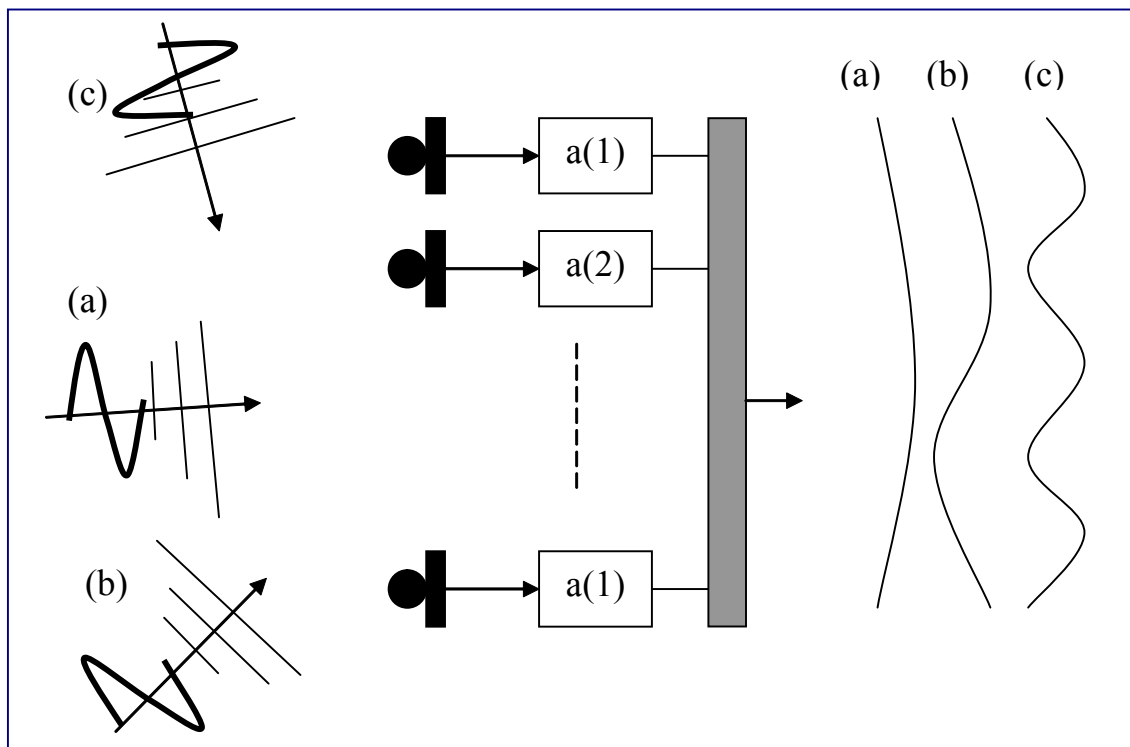


Figura I.2. Firma espacial sobre una apertura lineal de una fuente en tres posiciones diferentes de elevación ( a.- Próxima a  $0^\circ$ , b.- Próxima a  $45^\circ$  y c.- Próxima a  $90^\circ$ ).

Antes de proseguir con una descripción más formal del problema del procesado espacial, es necesario mencionar que existen dos direcciones que tienen un nombre específico. Refiriéndose al caso de una apertura lineal o plana, la dirección perpendicular a la apertura se le denominara "broadside". Es

decir en el caso de apertura lineal, el “broadside” serán todas las direcciones contenidas en un plano perpendicular al array. En el caso de una apertura planar será tan solo la dirección perpendicular al plano de la apertura. Otra dirección o conjunto de direcciones con nombre propio, que sugiere los comienzos en aplicaciones de radar y sonar del procesado de arrays, es la denominada “end-fire”. El “end-fire” es cualquiera de las direcciones que se encuentran en el plano de la apertura. En la apertura lineal es la línea de la apertura, y en el caso de la apertura planar es cualquier dirección contenida en su plano. Ambas definiciones carecen de sentido en aperturas tridimensionales. Como podrá verse la resolución de la diversidad espacial es siempre mayor en el “broadside” que en el “end-fire”, por esta razón, mas que geoméricamente, estas direcciones han de definirse como las de mayor o menor resolución de la apertura respectivamente. Nótese otra diferencia, los filtros para seleccionar direcciones en el broadside serán siempre más selectivos que los que hayan de seleccionar direcciones en el end-fire. La razón se vera mas adelante pero baste pensar que, entendiendo nuestros oídos como un array, siempre que deseamos localizar una dirección alineamos su “broadside” con la dirección en que buscamos.

Dado que de la diversidad espacial, el primer objetivo es la localización física de la fuente que firma en esta, esta localización se especificara en base a la distancia a un punto de referencia, que elegirá el diseñador, de la fuente y en sus dos ángulos directores: Elevación y azimut.

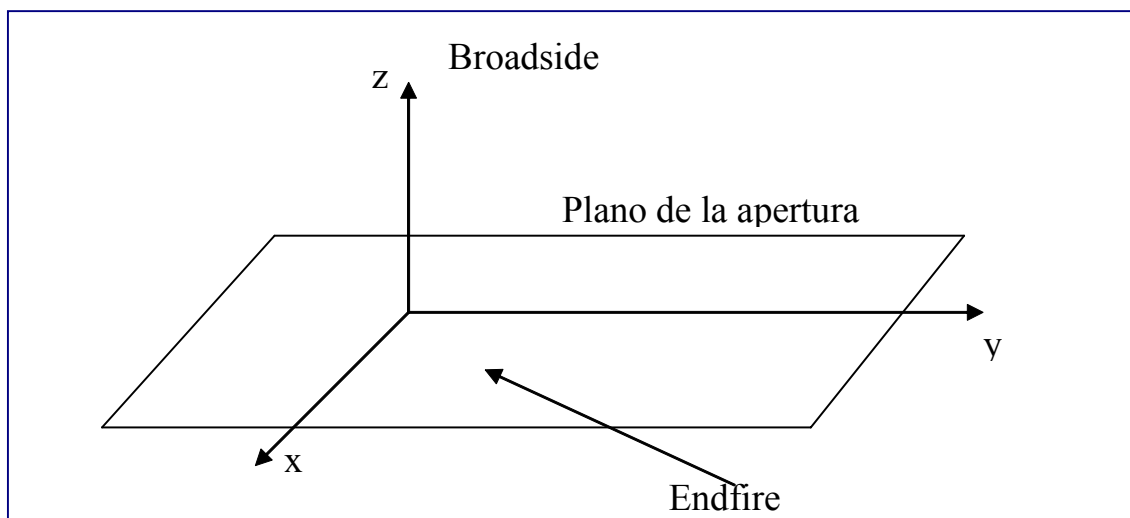


Figura I.3. Direcciones broadside y end-fire para una apertura planar

En la Figura I.4 se indican, también para una apertura planar los ángulos directores, que junto con el rango o distancia al centro de coordenadas, caracterizan la posición de una fuente respecto a la apertura. Habitualmente se hace coincidir el norte geográfico con el eje y.

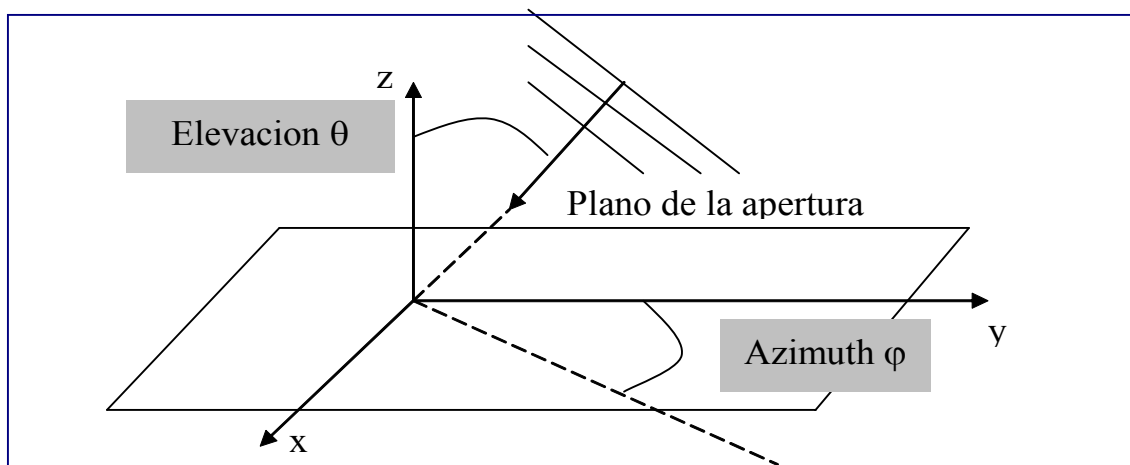


Figura I.4. Posición de una fuente en elevación y azimut referidas al plano de la apertura.



Antes de proseguir hemos de destacar que el array o apertura es la manera de combatir con diversidad la pérdida de resolución o su extremado costo asociado al empleo de un solo sensor. Este problema motivado fundamentalmente en sonar y audio, debido como se vera a las elevadas longitudes de onda asociadas a ondas de presión sonoras, fue el que dio lugar al desarrollo del procesado de arrays. De hecho, aun hoy en audio, en las columnas de sonorización de equipos de audio, podemos ver el array formado por los diferentes altavoces trabajando en diferentes bandas de frecuencia.

En el próximo apartado se comenzara a dotar de formulación a la firma en la diversidad espacial. Aunque será motivo mas adelante de un análisis separado, por el momento, se considerara el caso de recepción en la apertura, al margen de que estas, desde el punto de vista teórico, se comportan del mismo modo en transmisión.

## 1.2 SEÑAL DE FUENTE Y SEÑAL DE SENSOR.

Si se supone una fuente situada en los ángulos  $(\theta_s, \varphi_s)$  que emite una señal paso banda muy estrecha  $x_s(t)$ , asumiendo que se encuentra en campo lejano y que, por tanto, el frente de onda es plano, se puede dar una expresión de la señal en el sensor  $q$ . Para obtener la expresión de la señal en el sensor, se ha de asumir un punto de referencia que se denomina centro de fase. El significado del centro de fase es que los tiempos de llegada (TOA Time of Arrival) estarán referidos al punto elegido como centro de fase. Es decir, tomando las coordenadas del centro de fase como origen o punto  $(0,0,0)$ , y asumiendo que en este punto se recibiría la señal como  $x_s(t-t_0)$ , la señal recibida en el sensor  $q$  tendrá un retardo respecto a la anterior  $\tau_{qs}$  que dependerá de la posición del sensor en la apertura y de la dirección de llegada o DOA (Direction of Arrival) de la fuente en cuestión.

$$\text{sensor } \#q \text{ ---- } > x_s(t - t_0 - \tau_{qs}) \quad (1.5)$$

Es decir, la señal recibida en el sensor  $q$  tendrá un retardo con respecto a la recibida en el centro de fase que contiene información de la posición de la fuente y que depende del punto de diversidad elegido o posición del sensor.

Antes de proseguir se ha de insistir que el centro de fase es un punto físico no necesariamente accesible. Dicho de otro modo, no tiene porque haber una antena o sensor en el centro de fase. Si se imagina una apertura circular, el centro de fase natural estará en el centro, donde habitualmente no existe un sensor. El hecho de que el centro de fase no coincida con la posición de un sensor no es problema ya que el sistema de localización y procesado de la señal de una fuente es un sistema diferencial que se basa en las diferencias en los TOA a cada sensor y no requiere de una medida absoluta. En resumen, el procesado no dependerá del tiempo  $t_0$ .

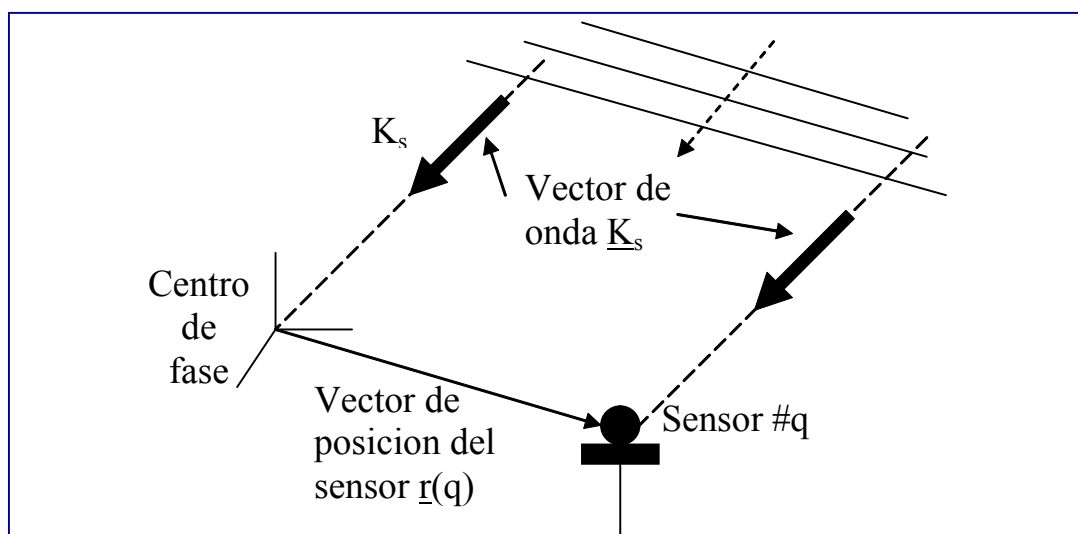


Figura I.5. Propagación de un frente de onda con indicación del vector de onda sobre una apertura. La señal en el sensor estará referida a la recibida por un sensor virtual o no en el centro de fase seleccionado.

Es fácil de probar, usando geometría elemental que el retardo debido a la velocidad de propagación del frente de onda viene dado por el producto escalar del vector de onda de la fuente por el vector de posición del sensor. Expresando el vector de onda en función de su modulo y ángulos directores se obtiene:

$$\underline{k}_s = \frac{2\pi}{\lambda} (\text{sen}(\theta_s) \cdot \cos(\varphi_s), \text{sen}(\theta_s) \cdot \text{sen}(\varphi_s), \cos(\theta_s)) \quad (I.6)$$

Siendo  $\lambda$  la longitud de onda de la fuente (igual a la frecuencia dividido por la velocidad de propagación  $c$ ) y  $\theta_s$  y  $\varphi_s$  la elevación y el azimut de la fuente respectivamente. Recuerde que el norte geográfico se toma coincidente con el eje  $y$  (horizontal) de la grafica.

Considerando ahora una apertura planar, el vector de posición, siempre respecto al centro de fase, del sensor  $q$  vendrá dado por (I.7).

$$\underline{r}_q = d_q (\cos(\varphi_q), \text{sen}(\varphi_q), 0) \quad (I.7)$$

De este modo, el producto escalar o el tiempo de retardo, tras agrupar términos resulta igual a (I.8).

$$\tau_{qs} = d_q \frac{\text{sen}(\theta_s)}{c} \cdot \cos(\varphi_s - \varphi_q) \quad (I.8)$$

$$\text{Carga de fase} = \phi_{qs} = 2\pi \cdot f \cdot \tau_{qs} = \underline{k}_s \otimes \underline{r}_q = 2\pi \cdot f \cdot \frac{\text{sen}(\theta_s)}{c} \cdot \cos(\varphi_s - \varphi_q) \cdot d_q$$

Aquí aparece otra de las peculiaridades del procesado en arrays, la medida a la que el diseñador tiene acceso es el tiempo de retardo, o mas bien la carga de fase (producto de la pulsación de la fuente por el tiempo de retardo) y la información deseada, que es la posición de la fuente, depende de una manera no lineal de esta medida. Es decir, pensar que estimar el DOA de una fuente es similar a un problema de estimar la frecuencia de una señal no es estrictamente correcto. El procesador accede al segundo termino de (I.8), y de este ha de estimar elevación y azimut vía la relación mencionada. Ahora es fácil de entender que a frecuencias bajas sea difícil precisar la posición de una fuente pues la carga de fase a frecuencias bajas presenta una sensibilidad (derivada con respecto al ángulo) menor que a frecuencias elevadas. También es de destacar que dicha derivada con respecto a la elevación es máxima para elevación cero, de nuevo, esta es la justificación de que la sensibilidad o resolución es mayor en el broadside que en el end-fire donde la elevación es  $90^\circ$  y la sensibilidad es cero. Como puede ver el lector, las reflexiones sobre la carga de fase entrañan el conocimiento de la riqueza de la información proporcionada por la diversidad espacial y, a su vez, los problemas específicos o nuevos, con respecto a procesado de señal con diversidad temporal, que entraña. Nótese que, en definitiva el problema de localización de fuentes consistirá en como, a partir de las cargas de fase en los diferentes elementos de la apertura, se puede llegar a conocer los ángulos directores de todas las fuentes presentes en el escenario.

Ahora se expondrá otra interpretación física y la representación habitual en radar y sonar para la localización de fuentes. Dado que la nomenclatura procede de exploración geológica se expondrá bajo esta perspectiva. Considerando una apertura sobre la superficie de la tierra, aproximadamente plana, el tiempo de retardo presenta dos factores. El termino de diferencia de azimut entre fuente y sensor no merece mas comentarios, pero si el primer termino, que se reproduce a continuación,

$$SF_s = \frac{\text{sen}(\theta_s)}{c} \quad (I.9)$$

Este factor, para una fuente justo debajo (o encima) de la apertura es igual a cero. Esta situación de "broadside" implica que la onda llega simultáneamente a todos los sensores, sin verse decelerada o retardada en ningún sensor. Por esta razón se le puede denominar una fuente rápida (llega inmediatamente a todos los sensores) o de deceleración cero ("slowness" factor). Es por esta razón que al cociente entre el seno de la elevación y la velocidad de propagación (dimensiones inversas a las de velocidad) se le denomina factor de deceleración. El caso opuesto, fuente situada en el plano de la apertura, tendrá una deceleración máxima igual a la inversa de la velocidad de propagación.

Esta interpretación permite una representación útil de la firma espacial de una fuente. Básicamente el punto indicador de la posición de la fuente se representa con el azimut respecto al norte geográfico  $\varphi_s$  y con un radio igual a su vector de deceleración. Mas gráficamente, una fuente justo debajo de la apertura aparece en el centro de una circunferencia; mientras que, una fuente situada en el plano de la apertura, es decir, una onda superficial, aparecerá en el círculo con el azimut correspondiente. La ventaja de esta representación, que se expone en la Figura I.6, es que reproduce como ‘vería’ las fuentes visualmente un observador situado en el centro de fase de manera similar a como tumbado en el suelo visualizamos las estrellas en la bóveda celeste. De hecho es la proyección sobre la esfera celeste de las fuentes en el caso de radioastronomía. En resumen, “slowness” factor y azimut caracterizan perfectamente la posición de una fuente con respecto a la apertura.

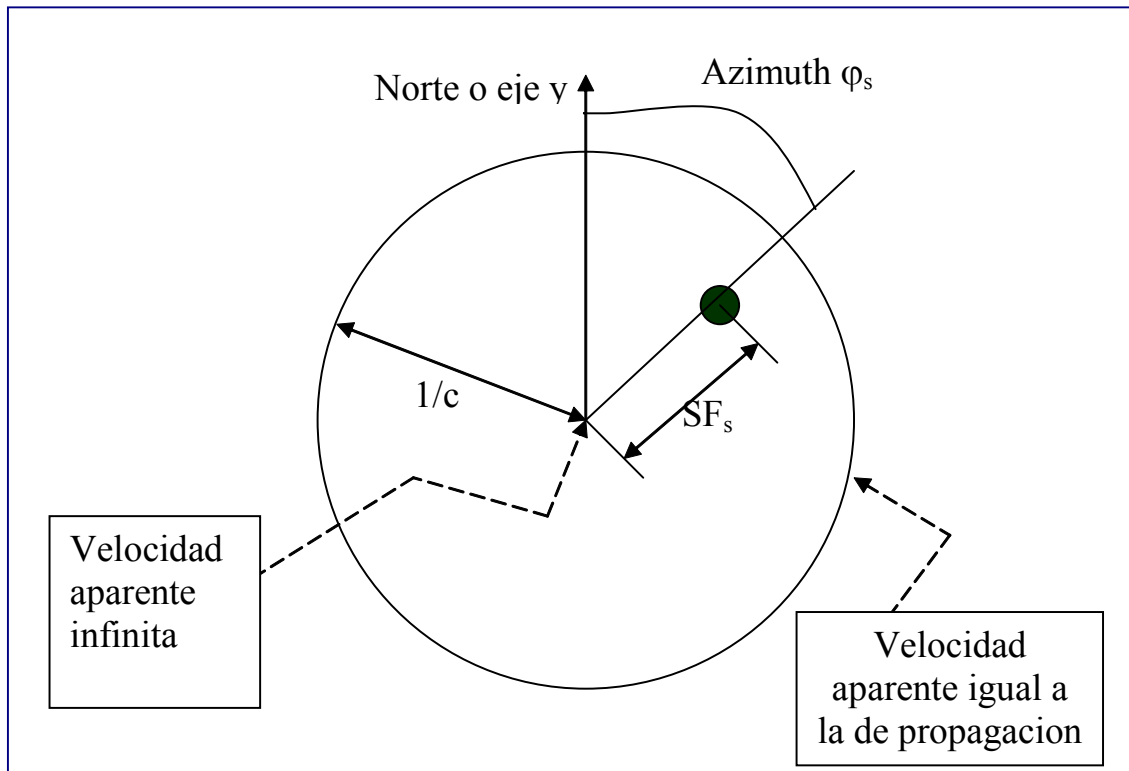


Figura I.6. Representación de la posición de una fuente en función del azimut y la inversa de la velocidad aparente o factor de deceleración (slowness factor).

De lo expuesto hasta ahora, se dispone de la señal en el sensor como la señal de fuente, asumiendo canal de propagación lineal y sin distorsión, con una expresión de su tiempo de retardo en función de la posición del sensor y la de la fuente correspondiente. Dicha señal de sensor, en función de la señal de fuente se repite a continuación.

$$x_s(t, q) = x_s(t - t_o - \tau_{qs}) \quad (I.10)$$

$$\text{con } \tau_{qs} = d_q \frac{\text{sen}(\theta_s)}{c} \cdot \cos(\varphi_s - \varphi_q)$$

Esta representación del efecto de la diversidad espacial provocada por la apertura es meramente temporal. Es interesante explorar ahora cual es su formulación en términos frecuenciales. Para ello se toma transformada de Fourier de la señal recibida en el sensor q. Dicha transformada de Fourier se expone en (I.11).

$$X_s(f, q) = X_s(f) \cdot \exp(-j2\pi f \cdot t_o) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot \tau_{qs}) \quad (I.11)$$

Claramente, en términos de localización de fuentes, es independiente de la forma de onda emitida. Esta formulación separa perfectamente el termino sobre el que recae el interés. Tan solo el

termino de fase, mas a la derecha, es el único relevante y que contiene la información de ángulos de llegada. De un modo intuitivo, los dos primeros términos son comunes a todos los sensores, y tan solo el ultimo, sensor a sensor, hace firmar de manera diferente a las fuentes en función de su posición. Mas interesante aun, si la fuente radia en varias longitudes de onda o frecuencias, cada "beam" de frecuencia repetirá la firma espacial aumentando las posibilidades de estimar con menor varianza la posición de la fuente. En definitiva, para una fuente de banda ancha, seleccionando con una resolución frecuencial dada las diferentes sub-bandas de frecuencia que la componen, se tendrán mayores posibilidades de estimar precisamente la posición. Llegado a este punto estamos ante una pequeña sorpresa, no solo la diversidad espacial sino la diversidad frecuencial ayuda a estimar la posición. Disponiendo un banco de filtros a la salida de cada sensor, digamos N filtros, se dispondrá de una firma en diversidad o imagen en el plano frecuencial y en el espacial, es decir, bidimensional según los ejes frecuencia y espacio. Puede verse que una fuente donde se puedan seleccionar N "beams" de frecuencia y con una apertura de Q sensores proporcionan una imagen de QxN con la firma de la fuente bajo análisis.

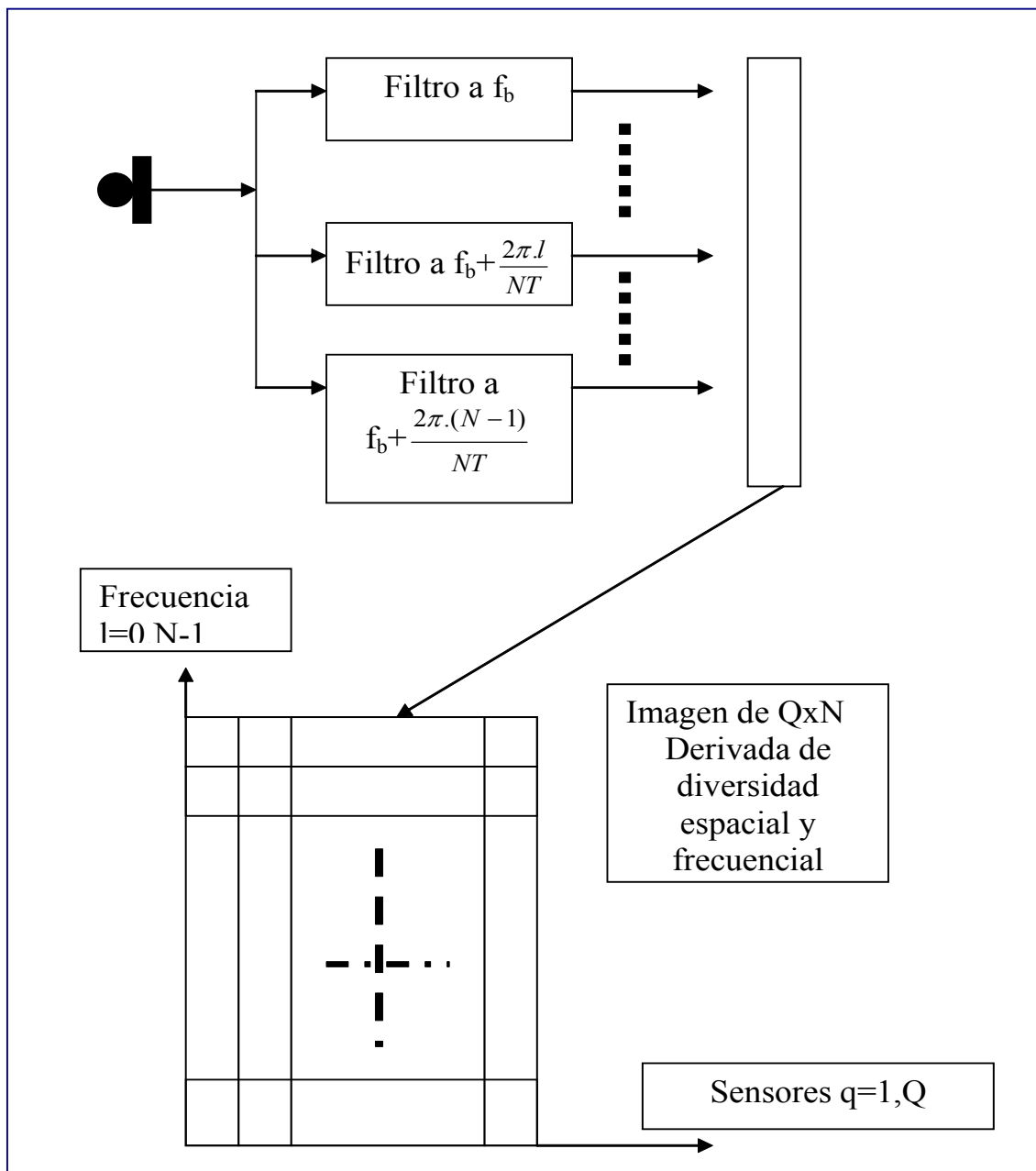


Figura I.7. Generación de diversidad frecuencial sobre la diversidad espacial. Se obtiene vía el filtrado desde la frecuencia mas baja  $f_b$  hasta la frecuencia superior  $f_b+(1/T)$  a la salida de cada sensor.

Tal y como puede verse en la figura anterior, una fuente de ancho de banda B, igual a  $1/T$ , se divide en N sub-bandas en cada sensor, a partir de la frecuencia inferior  $f_b$ . De este modo, el procesador dispone ahora de una imagen, cuyos ejes son espacio o posición del sensor y frecuencia. Cada una de estas señales obedece a la expresión

$$X_s(l, q) = X_s(l) \cdot \exp(-j2\pi l \cdot \frac{t_o}{NT}) \cdot \exp(-j2\pi l \cdot \frac{\tau_{qs}}{NT})$$

$$l = 0, N-1 \quad N \text{ bandas} \quad (I.12)$$

$$q = 1, Q \quad Q \text{ sensores}$$

Falta establecer, dado el ancho de banda B (igual a  $1/T$ ) cuantas bandas han de seleccionarse como máximo. Se establece un máximo en el sentido de que es de intuir que si N es grande, al margen de complicar en exceso el procesado, las bandas no presentarán independencia entre ellas y harán inútil el esfuerzo de reducir varianza en la estimación de la posición de la fuente. La respuesta es sencilla, el lector conoce que el número de bandas independientes en que se puede seccionar una señal es igual a producto duración temporal por ancho de banda. Luego, si la señal recogida en cada sensor es un segmento de NT segundos el número de bandas será igual a N. Esta es la única guía necesaria para proceder a disponer de diversidad espacial y frecuencial al mismo tiempo y su única limitación es la complejidad del procesador resultante. En otras palabras, a mayor N mejor para reducir varianza o mejorar la estimación pues se aumenta el orden de la diversidad pero se requerirán  $N \times Q$  filtros.

En términos de complejidad, es bien conocido que un banco de filtros de resolución constante y equi-espaciados puede realizarse mediante una FFT. De este modo, una FFT por cada señal de sensor producirá el mismo resultado que el conseguido con un banco de filtros. Obviamente, salvo casos de N reducido, esta opción de la FFT es la más adecuada.

Antes de continuar, se puede resumir que la diversidad espacial, en la que la fuente firma con un retardo, puede ampliarse, para señales de banda ancha, vía el uso de diversidad frecuencial. Tal diversidad frecuencial se genera vía FFT o banco de filtros en cada sensor convirtiendo la firma en una imagen según los dos ejes de diversidad empleados frecuencia y espacio. En cualquier caso, es fácil comprender que la complejidad crece notablemente si el número de bandas es una o son, digamos 256, N. La primera cuestión a resolver es cuando, o en que situación, se ha de considerar un escenario determinado como de banda ancha ( $N > 1$  bandas de frecuencia) o de banda estrecha (una sola banda de frecuencia). A esta cuestión responde el próximo apartado.

Antes de dejar el presente apartado, note que la sonorización de un equipo de audio, son dos columnas ( $Q=2$ ) en el sistema estereofónico y tres bandas, es decir, un banco de tres filtros por cada columna que distribuyen los graves, medios y agudos dentro de cada columna o sensor. Como puede ver, el sistema de banda ancha es muy antiguo y el utilizar diversidad espacial y frecuencial simultáneamente es una constante en audio donde la longitud de onda pasa de varios metros a unos centímetros en el margen audible.

### I.3 BANDA ANCHA Y BANDA ESTRECHA.

Aun sin conocer el tipo de proceso a llevar a cabo, el apartado anterior muestra lo crucial que es en términos de complejidad el decidir cuanto antes si se requiere un procesado de banda ancha o de banda estrecha. La cuestión se puede poner en términos de, dado un escenario con señales paso banda, de frecuencia central  $f_0$  y ancho de banda, alrededor de la frecuencia central, igual a  $B_0$ , cuando, a efectos de la diversidad espacial las fuentes, pueden considerarse de banda estrecha y cuando no. Para expresarlo con más claridad la cuestión es cuando la diversidad espacial puede considerarse que afecta igual a todas las frecuencias de la banda e igual a la de una sola frecuencia, en concreto a su portadora, y cuando la diversidad afecta a toda la señal de fuente de manera diferente y dependiendo de la frecuencia. Como puede ver el lector, la pregunta es ahora casi trivial de contestar pues, considerando una señal paso banda como la parte real del producto del equivalente paso bajo o envolvente compleja por el fasor a la frecuencia portadora, esta se traduce en cuando el equivalente paso bajo no firma en la diversidad espacial o, lo que es lo mismo, es invariante en cada elemento del array.

Para formular la cuestión en los términos mencionados al final del párrafo anterior, supóngase que la señal en el sensor  $q$ , debida a la fuente  $s$ , viene dada por (I.13).

$$x_q(t) = x_s(t - \tau_{qs}) = a_s(t - \tau_{qs}) \cdot \exp(-j2\pi f_o(t - \tau_{qs})) \quad (I.13)$$

Siendo  $a_s(\cdot)$  la envolvente compleja y  $f_o$  la frecuencia central de la señal paso banda. Como podrá verse, en todo momento se empleara la representación analítica de las señales directamente.

Claramente para que la el proceso de la diversidad espacial pueda considerarse de banda estrecha se requerirá (I.14).

$$a_s(t - \tau_{qs}) \cong a_s(t) \quad \forall q = 1, Q, \forall s = 1, NS \quad (I.14)$$

Es decir, se requerirá que el retardo de grupo sea despreciable para cualquier sensor de los Q que forman la apertura y para cualquiera de las NS fuentes presentes en el escenario.

Nótese que una manera elegante de definir el criterio de escenario de banda estrecha es decir que es aquel donde el retardo de grupo a lo largo de la apertura es despreciable. En efecto, en esta situación la diversidad hace que tan solo la portadora, con su retardo de fase, firme con información dependiente de los ángulos de llegada.

$$\begin{aligned} x_q(t) &= x_s(t - \tau_{qs}) \cong a_s(t) \cdot \exp(-j2\pi f_o t) \cdot \exp(j\zeta_{qs}); \\ \zeta_{qs} &= 2\pi f_o \cdot \tau_{qs} = \frac{2\pi f_o}{c} \cdot d_q \cdot \text{sen}(\theta_s) \cdot \cos(\varphi_s - \varphi_q) \end{aligned} \quad (I.15)$$

Así pues, la diversidad espacial hace firmar a las fuentes con un retardo de fase, o fase, dependiente de la posición de cada una de estas.

Retomando la cuestión de cuando se puede despreciar el retardo de grupo, es decir, cuando puede afirmarse (I.16),

$$a_s(t - \tau_{qs}) \cong a_s(t) \quad (I.16)$$

es mas conveniente plantearlo en el dominio frecuencial (I.17).

$$A_s(w) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau_{qs}) \cong A_s(w) \quad (I.17)$$

En esta ultima relación se hace evidente que el producto frecuencia por retardo de grupo ha de ser despreciable. Dado que dicho producto ha de ser despreciable para cualquier sensor del array y para cualquier frecuencia, lo correcto es ponerse en la situación mas desfavorable. La situación mas desfavorable en lo que se refiere a posición de la fuente es que esta se sitúe en el “end-fire”, provocando que tanto el seno como el coseno de la segunda expresión de (I.13) sean la unidad. Con respecto a la posición del sensor, lo mas desfavorable es coger el sensor mas alejado del centro de fase, considerando que el centro de fase esta dentro del recinto de la apertura y que la dimensión máxima de esta es de D metros, el peor valor de  $d_q$  será precisamente D. Con respecto a la máxima excursión de frecuencia del equivalente paso bajo, claramente lo peor es encontrarnos en el extremo de la banda, es decir, en  $B_o/2$ , o peor en  $B_o$  (Este es el caso de banda lateral única o SSB). En resumen, el máximo valor del producto frecuencia retardo de grupo es (I.18).

$$f \cdot \tau_{qs} \leq B_o \cdot D / c = \frac{B_o}{f_o} \cdot \frac{D}{\lambda} \ll 1 \quad (I.18)$$

Que puede expresarse como (I.19).

$$\frac{D}{\lambda} \ll \frac{f_o}{B_o} \quad (I.19)$$

La lectura de la condición de banda estrecha puede hacerse diciendo que el escenario es de banda estrecha siempre que la dimensión de la apertura en longitudes de onda es mucho menor que la frecuencia central dividido por el ancho de banda.

Nótese que en comunicaciones vía satélite y radar para frecuencias centrales de 19 GHz y 9GHz, en general, las dimensiones de la apertura tendrían que ser gigantescas para encontrarse en banda ancha. Incluso para comunicaciones móviles de frecuencia central 2 GHz sobre anchos de banda de 5 MHz, requerirían aperturas de 400 longitudes de onda ( en un array ULA a  $\lambda/2$  de separación entre elementos, implicaría un array lineal de 800 elementos). Así pues, en general, en comunicaciones móviles, satélite y radar, el procesado espacial será siempre de banda estrecha. Este no será el caso en audio o sonar de exploración (no de comunicaciones) donde las frecuencias centrales son muy pequeñas en relación al ancho de banda empleado. También es el caso en exploración geofísica donde frecuencias centrales del orden de 1-10Hz hacen constante la problemática de banda ancha.

En este momento ya se dispone del criterio de banda ancha o banda estrecha, así como la composición de la señal del sensor y la señal de fuente vista en el apartado anterior. Es ahora el momento de dar una formulación mas sólida a la firma que en diversidad espacial provoca una serie de fuentes en un escenario.

#### 1.4 MODELO DE SEÑAL DE APERTURA: EL SNAPSHOT

Dado que la caracterización de un escenario de banda ancha es mas complicado, se comenzara por el escenario de banda estrecha. Esta forma de proceder será una constante a lo largo de todas las exposiciones.

Tal y como se ha expuesto, cuando el retardo de grupo es despreciable, con respecto al centro de fase, la señal que se recibe en un sensor debido a una fuente situada en  $(\theta_s, \varphi_s)$  viene dada por:

$$x_{qs}(t) = a_s(t) \cdot \exp(j\omega_o t) \cdot \exp(j\theta_{qs})$$

$$\text{array lineal} \quad \theta_{qs} = 2\pi f_o \cdot d_q \cdot \frac{\text{sen}(\theta_s)}{c}$$

$$\text{array lineal uniforme} \quad \theta_{qs} = q \cdot 2\pi f_o \cdot d \cdot \frac{\text{sen}(\theta_s)}{c}; d \text{ separacion inter-elementos}$$

$$\text{array planar} \quad \theta_{qs} = 2\pi f_o \cdot d_q \cdot \frac{\text{sen}(\theta_s)}{c} \cdot \cos(\varphi_s - \varphi_q)$$

Así pues, si se congela el tiempo en un instante t, el conjunto de valores que tomaría la señal recibida en todos los sensores de la apertura pueden concentrarse en las componentes de un vector, según se indica

$$\underline{X}_t = a_s(t) \cdot \underline{S}_s$$

El termino correspondiente a la frecuencia portadora se omite pues, como se vera en adelante solamente es necesario su multiplicación sistemática en todas las derivaciones y formulas. También puede pensarse que la estimación no cambiara tanto si se realiza en RF, IF o banda base. Es decir todas las señales que se utilizaran a partir de este momento, para pasar a ser la señales reales, habrán de multiplicarse por el fasor de la portadora o frecuencia de análisis. Su parte real e imaginaria será la componente en fase y cuadratura respectivamente de la señal en cuestión. Volviendo a (I.18), es interesante destacar que el vector indicado separa claramente la información temporal de la fuente de su información de posición. Para entender la importancia de esta separación, nótese que si se esta interesado en localizar la posición de la fuente tan solo el vector  $\underline{S}_s$  será de interés, mientras que para el receptor de comunicaciones lo crucial será obtener  $a_s(t)$ . Dado que el vector  $\underline{S}_s$  contiene la información de posición de la fuente se le denominara vector de posición o, por razones que se verán mas adelante, vector de enfoque de la fuente s ('steering vector'). En resumen la firma de la fuente de banda estrecha en la diversidad espacial es el producto de la envolvente paso bajo por el vector de steering de la fuente.

Si en lugar de existir una fuente presente en el escenario, se tienen NS fuentes, el vector de señal en la apertura en el instante t sería

$$\underline{X}_t = \sum_{s=1}^{NS} a_s(t) \cdot \underline{S}_s$$

Claramente, los vectores de dirección serán normalmente independientes con lo que la dimensión del espacio en donde se enmarca el vector en la apertura es igual al número de fuentes.

En cualquier caso, la formulación anterior no es completa ya que un análisis detallado de cada elemento en la apertura revela o conlleva los siguientes problemas: En primer lugar los sensores pueden no estar calibrados y no proporcionar el mismo nivel de señal. Esto implica que el vector de dirección y el vector de firma en la apertura diferirían en una matriz G.

Array calibrado

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{g}_o$$

Array calibrado (elementos no isotrópicos)

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{g}_o(\theta, \varphi)$$

Array no calibrado (elementos isotrópicos)

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} g_o & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & g_1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & g_Q \end{bmatrix}$$

Array no – calibrado (elementos no – isotrópicos)

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} g_o(\theta, \varphi) & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & g_1(\theta, \varphi) & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & g_Q(\theta, \varphi) \end{bmatrix}$$

Array no – calibrado (elementos no – isotrópicos) con acoplamiento mutuo no nulo

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} g_o(\theta, \varphi) & g_{o1} & \cdot & g_{oQ} \\ g_{10} & g_1(\theta, \varphi) & \cdot & g_{1Q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{Q0} & g_{Q1} & \cdot & g_Q(\theta, \varphi) \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}_t = \sum_{s=1}^{NS} a_s(t) \cdot \underline{\underline{G}}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \underline{S}_s$$

(I.20)



Esta matriz es diagonal, y su dependencia con los ángulos de llegada de la fuente indica que el sensor no es isotrópico (no responde igual en cualquier dirección) y, si además todos los sensores tienen una respuesta diferente, entonces la matriz no tendrá el mismo valor en su diagonal principal. En el esquema de la página anterior se resumen las estructuras diferentes que puede tomar la matriz  $\underline{G}$  dependiendo de la disparidad, directividad y acoplamiento mutuo (“mutual coupling”) entre elementos.

El segundo factor a tener en cuenta es que tanto el interfase con el medio de propagación (antena o micrófono) como el amplificador de bajo ruido, introducen un ruido. La inclusión de este ruido convierte el vector en

$$\underline{X}_t = \sum_{s=1}^{NS} a_s(t) \cdot \underline{G}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \underline{S}_s + \underline{w}_t \quad (\text{I.21})$$

Las componentes de este vector son esencialmente el ruido térmico generado en la adquisición y condicionamiento de la señal recibida. Dada la independencia entre el fenómeno físico que lo produce, diferente amplificador o antena, es lógico suponer que las componentes de  $\underline{w}_t$  son incorreladas de sensor a sensor.

$$E[w_q(t) \cdot w_p^*(t)] = \sigma_q^2 \cdot \delta(q, p) \quad (\text{I.22})$$

Donde  $\delta(\cdot, \cdot)$  es la delta de Kronecker y  $\sigma_q^2$  es la potencia de ruido en el sensor #q.

En resumen el vector de diversidad estará formado por una componente suma de la contribución de las fuentes en el escenario más una contribución del ruido de sensores. Se ha de destacar, que acoplamiento mutuo o ausencia de calibración es un problema grave que deteriora gravemente, como se tendrá oportunidad de comprobar más adelante, la calidad del procesamiento de arrays. Es por esta razón que, salvo de especificarse lo contrario se considerará el array calibrado en el sentido de igualdad de respuesta en todos los sensores y LNAs, y sin acoplamiento mutuo apreciable. En otras palabras el vector de la apertura será:

$$\underline{X}_t = \sum_{s=1}^{NS} a_s(t) \cdot \underline{S}_s + \underline{w}_t \quad (\text{I.23})$$

El ruido térmico será del mismo nivel en todos los canales. Esta última restricción es menos rigurosa, en el sentido de que su impacto en las técnicas que siguen es muy inferior al problema de acoplamiento mutuo o matriz  $\underline{G}$  no igual a la identidad.

$$\sigma_q^2 = \sigma^2 \quad \forall q = 1, Q \quad (\text{I.24})$$

También ha de comentarse que este modelo de señal en la apertura, asume implícitamente que se está ante fuentes puntuales, es decir, el frente de onda o la energía que incide en la apertura proviene de un solo punto en el escenario. En el caso de tener fuentes distribuidas alrededor de un ángulo  $\theta_s$  y con una distribución de energía  $f(\theta/s)$  el vector de apertura pasaría a ser (I.25), para una apertura lineal o solo sensible a la elevación.

$$\underline{X}_t = \sum_{s=1}^{NS} a_s(t) \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta/s) \cdot \underline{S}_s d\theta + \underline{w}_t \quad (\text{I.25})$$

Es muy importante destacar que tanto en el caso calibrado, como de existir problemas de calibración, acoplamiento mutuo o fuentes distribuidas o no puntuales, el modelo (I.23) siempre es válido. Lo que cambia es el vector de enfoque o “steering” de las fuentes de una situación a otra. En definitiva, esta foto tomada en el instante  $t$  de la señal en la apertura y que se denominará “snapshot” siempre tiene la forma de (I.26).

$$\underline{X}_t = \sum_{s=1}^{NS} a_s(t) \cdot \underline{S}_s + \underline{w}_t \quad (I.26)$$

Las diferencias son que en una array calibrado, sin acoplamiento mutuo y fuentes puntuales las componentes del steering son exponenciales con la fase correspondiente al retardo de fase. En el resto de situaciones, el vector de steering difiere por pre-distorsión debida a la matriz  $\underline{G}$  o por la integración asociada a la firma espacial de fuentes distribuidas. Es aquí donde radica el problema, en el sentido que, al asumir en los procedimientos que se derivaran calibración, se dará por valido que los vectores que multiplican a la envolvente paso bajo son los de “steering”. Si esto no es así, la validez y calidad de los métodos de procesado quedara en cuestión. De hecho, es una pregunta habitual el plantearse, al diseñar un procesador de array, sobre la robustez de este ante problemas de calibración, “mutual coupling”, fuentes distribuidas, ruido térmico diferente, etc. En general, el ranking que, desde un punto de vista teórico, se les otorga se ve seriamente alterado por estas consideraciones de robustez ante los problemas mencionados.

Ha de destacarse que es la calibración y los niveles bajos de acoplamiento mutuo lo que, entre otros aspectos, hace que un terminal avanzado con procesado espacial sea considerablemente mas complejo, en costo e ingeniería, que un terminal sin procesado espacial.

También es de señalar que el procesador espacial consumirá en su diseño un numero determinado de “snapshots”. Estos habitualmente, aunque no necesariamente en una implementación digital, serán muestras en instantes  $T_n$ , por lo que se denotaran como (I.27).

$$\underline{X}_n = \sum_{s=1}^{NS} a_s(t_n) \cdot \underline{S}_s + \underline{w}_n \quad (I.27)$$

Se ha de insistir que los “snapshots” que se requerirán para el diseño del procesador espacial necesitan estar adquiridos uniformemente en tiempo. Tampoco han de ser uniformes por disponibilidad tecnológica, tan solo en comunicaciones, y no en detección de ángulo de llegada, habrán de disponerse a la misma velocidad que el receptor de banda base. Mas claro, si un procesador espacial precede a un receptor de comunicaciones, el procesador de banda base, a cuatro muestras por símbolo, para 5 Mbps en señalización binaria, ira a una frecuencia de muestreo de 20 MHz. Por otro lado, el procesador espacial ha de seguir la posición de la fuente deseada en cada instante, por lo que seguir su posición a un ritmo de 1000 veces por segundos será mas que suficiente. Es decir, el procesador de banda base va a 20MHz de muestreo mientras que el procesador espacial va a 1Khz de muestreo para sus snapshots. Dado que el muestreo de snapshots, aunque no es necesario, suele realizarse uniforme, se escribirá (I.27) según (I.28) en todo lo que sigue.

$$\underline{X}_n = \sum_{s=1}^{NS} a_s(n) \cdot \underline{S}_s + \underline{w}_n \quad (I.28)$$

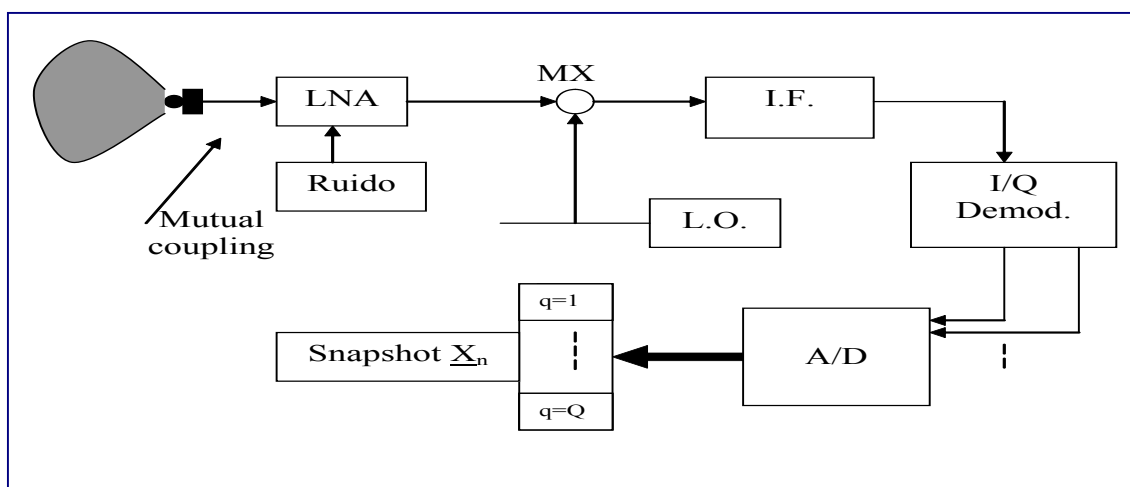


Figura I.8. La cadena de recepción hasta la formación del “snapshot” a la salida del conversor A/D.

Como se ha indicado, en la cadena de proceso que sigue a cualquier sensor, tanto el propio sensor como el amplificador de bajo ruido, o acondicionador de señal, introducen problemas si la fiabilidad de su producción no es adecuada para conseguirlos similares, o bien su figura de ruido es elevada. No obstante, la cadena continua, posiblemente, con conversiones de frecuencia, amplificadores de frecuencia intermedia, descomposición i/q y muestreo. Obvia decir que, de nuevo, el procesador espacial sube los requerimientos en producción de mezcladores amplificadores y demoduladores i/q, pues si estos componentes o sistemas difieren de canal a canal, de nuevo se estará ante problemas de calibración. Esta es la razón, unida a las posibilidades de reconfiguración, por las que cada vez mas el desarrollo tecnológico acerca el conversor A/D a la antena o al sensor. A partir del A/D todo es reconfigurable y de fácil calibración y/o auto-calibración. Ha de recordarse que la información espacial son retardos y fase, de modo que si estos se alteran en cada cadena de recepción el procesador espacial ve deteriorada su fuente de información y en consecuencia sus estimaciones podrán ser francamente erróneas.

La formulación del "snapshot" como suma de los vectores correspondientes a cada una de las fuentes puede compactarse vía la agrupación de todos los "steerings" en la denominada matriz de DOAs (Matriz de Direcciones de Llegada). De este modo, el "snapshot" se reduce al producto de la matriz de DOA, denotada con la letra  $\underline{A}$ , por el denominado vector de fuentes  $\underline{a}_n$  mas la contribución del ruido Es decir, el "snapshot" pasa a ser (I.29).

$$\underline{X}_n = \underline{A} \underline{a}_n + \underline{w}_n \tag{I.29}$$

Siendo

$$\underline{a}_n = \begin{bmatrix} a_1(n) \\ a_2(n) \\ \vdots \\ a_{NS}(n) \end{bmatrix} \quad \underline{A} = [\underline{S}_1 \quad \underline{S}_2 \quad \dots \quad \underline{S}_{NS}] \tag{I.30}$$

Nótese que la matriz de DOA es de dimensión  $Q \times NS$ , es decir el numero de filas es igual al numero de sensores y el numero de columnas igual al numero de fuentes.

Una vez se ha llegado a la formulación compacta del "snapshot" en banda estrecha, se hace necesario proceder a su formulación en el caso de banda ancha.

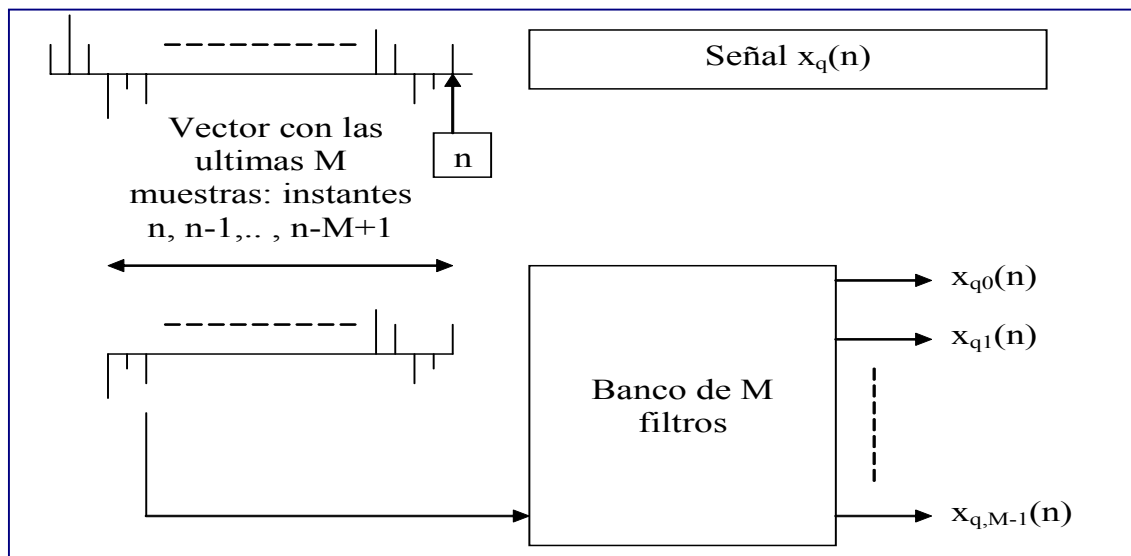


Figura I.9. Filtrado por banco de M filtros. La resolución de los filtros es  $1/MT$ , luego su transitorio dura  $MT$ . Se utilizan M muestras de la señal del sensor q, se espera a que transcurra el transitorio y se produce un vector de M componentes en las que el índice  $m=0, M-1$  describe la frecuencia central de filtro correspondiente.

Refiriéndonos a la Figura I.7, se ha de recordar que una apertura de banda ancha puede generar snapshots de banda estrecha vía el uso de un banco de filtros por cada sensor. Si el ancho de banda de la señal de fuente es  $B$  y la duración de la respuesta impulsional de los filtros paso banda es  $MT$ , siendo  $T$  el periodo de Nyquist para un ancho de banda  $B$  del equivalente paso bajo, i.e.  $T=1/B$ , el número de bandas independientes sería de  $M$  con un ancho de banda para cada filtro de  $1/(MT)$ . En otras palabras, el proceso de filtrado se puede imaginar e implementar del siguiente modo: Se toman de cada sensor  $M$  muestras, a continuación estas  $M$  muestras se filtran por un banco de filtros para, al cabo de  $M$  muestras (pasado el transitorio del filtro), cada uno de los filtros produce una salida que dependerá del instante de tiempo en que se tomo el segmento de  $M$  muestras y del filtro paso banda seleccionado. La Figura I.9 ilustra el proceso descrito.

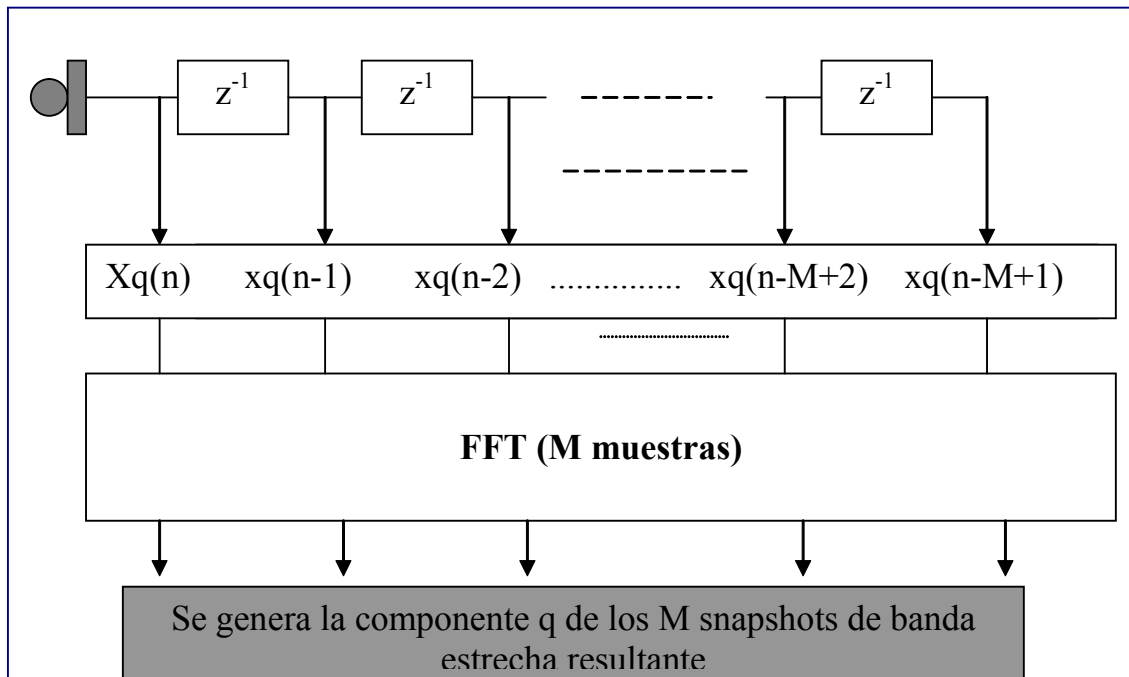


Figura I.10. Generación de los snapshots de banda estrecha a partir de  $M$  muestras de cada sensor y una FFT de  $M$  muestras.

La manera de proceder con el diseño en la práctica es como sigue: La señal paso banda de ancho de banda  $B$  se muestrea a  $T=1/B$ . Como puede verse el ancho de banda de los filtros digitales del banco ha de elegirse de tal manera que, para las señales a su salida, se verifique la condición de array de banda estrecha. Si el ancho de banda es  $B_f=1/MT$ , su respuesta FIR será de una duración  $1/B_f$ . Esto quiere decir que al someter una señal a su entrada tan solo se producirán muestras independientes cada  $M$  muestras de la entrada. En otras palabras, aunque la señal se aplicase de manera continua a su entrada, tan solo cada ese tiempo se dispondría de una muestra independiente y por tanto útil en el procesador espacial. Por esta razón, para ahorrar operaciones en el procesador digital, se aplicarían segmentos no solapados de duración  $M$  muestras. El pre-procesado frecuencial usa pues  $M$  muestras por sensor; al tener  $Q$  sensores en la apertura, el número total de componentes asociadas a un “snapshot” de banda ancha será en total de  $M \times Q$  componentes.

Antes de volver a la formulación del “snapshot” de banda ancha, ha de notarse que el banco de filtros situado en cada sensor produce un conjunto de muestras  $x_{q,m}(n)$ , donde  $n$  denota instante de tiempo,  $q$  el sensor, y  $m$  la frecuencia central del filtro. Para filtros equi-espaciados  $m$  indicara, entre cero y  $M-1$ , una frecuencia igual a  $m/(MT)$  Hz. En definitiva, los  $Q$  sensores proporcionan a la salida de los bancos de filtros  $M$  snapshots de banda estrecha tal y como se indica en (I.31).

$$\underline{X}_{n,m} = \left( \sum_{s=1}^{NS} A_S(m) \cdot \underline{S}_S(m) + \underline{w}_{n,m} \right) \exp(m \cdot w_O); \quad m = 0, M-1$$

siendo

$A_S(m)$  = Envolvente compleja de la señal de entrada filtrada paso – banda (I.31)

a una frecuencia central  $mf_O = \frac{m}{M \cdot T}$  con ancho de banda  $\frac{1}{MT}$

$\underline{S}_S(m)$  = Steering de la fuentes a la frecuencia  $\frac{m}{M \cdot T}$

$\underline{w}_{n,m}$  ruido termico filtrado en las mismas condiciones

Nótese que al igual que anteriormente, el termino correspondiente a la portadora, una diferente para cada “snapshot”, puede omitirse si estos snapshots se tratan o usan atendiendo a su naturaleza de banda estrecha.

Como habrá podido observar el lector, el banco de filtros se ha elegido FIR y se ha insistido en que el carácter independiente de las muestras se obtiene cuando se segmenta la señal de entrada en tramos de M muestras. La razón de esta insistencia es facilitar la conclusión de que una manera efectiva de implementar el banco de filtros, siempre que el ancho de banda sea uniforme, es vía una DFT de M puntos (filtros) sobre los segmentos de M muestras. En definitiva, determinado M como se ha indicado previamente, el procesado que se lleva a cabo en cada sensor es el que se indica en la Figura I.10.

Llegado este punto se esta en condiciones de escribir de dos maneras diferentes el “snapshot” de banda ancha. La primera y mas normal es considerar que si de cada sensor se requieren M muestras el “snapshot” será la colección de MxQ muestras utilizadas. De este modo, el “snapshot” de banda ancha será (I.32).

$$\underline{X}_n = [x_1(n), x_1(n-1), \dots, x_1(n-M+1), x_2(n), x_2(n-1), \dots, x_2(n-M+1), \dots, \dots, x_Q(n), x_Q(n-1), \dots, x_Q(n-M+1)]^T \quad (I.32)$$

Este “snapshot” contiene dos ejes de diversidad: el espacial y el temporal que puede convertirse en frecuencial si se desea o se necesita pasar a un procesado de banda estrecha. Esta, en frecuencia es precisamente la segunda posibilidad, es decir, se puede considerar que los M snapshots de banda estrecha, ya sea agrupados en una matriz o uno encima de otro, constituyen el “snapshot” de banda ancha. El problema de (I.32) es que no permite fácilmente una formulación tan elegante como la obtenida par el “snapshot” de banda estrecha donde envolvente compleja y steering modelaban perfectamente la contribución de cada fuente al “snapshot”. No obstante, se puede generar una formulación similar considerando que una fuente s esta compuesta por M componentes monocromáticas de frecuencias  $m/MT$ . Cada componente monocromática firmaría en la diversidad espacio temporal con un vector de “steering” igual a (I.33),

$$\underline{S}_{m,s} = [1 \cdot \exp(j\phi_{s1}), \exp(j\phi_{s1}) \exp(-jw_m), \dots, \exp(j\phi_{s1}) \exp(-jw_m(M-1)), \\ 1 \cdot \exp(j\phi_{s2}), \exp(-jw_m) \cdot \exp(j\phi_{s2}), \dots, \exp(-jw_m(M-1)) \cdot \exp(j\phi_{s2}), \dots, \dots, \\ \dots, 1 \cdot \exp(j\phi_{sQ}), \exp(-jw_m) \cdot \exp(j\phi_{sQ}), \dots, \exp(-jw_m(M-1)) \cdot \exp(j\phi_{sQ})]^T \quad (I.33)$$

Siendo, para un array lineal,

$$\phi_{sq} = \frac{w_m}{c} \cdot d_q \cdot \text{sen}(\theta_s) \quad (I.34)$$

Con esta formulación, el “snapshot” de banda ancha puede formularse como:

$$\underline{X}_n = \sum_{s=1}^{MSM-1} \sum_{m=0} \alpha_{m,s}(n) \cdot \exp(jw_m t) \cdot \underline{S}_{m,s} + \underline{w}_n \tag{I.35}$$

Estas ultimas expresiones, al margen, de imitar el modelo de banda estrecha para banda ancha, serán de un gran utilidad en el tercer capitulo.

Manteniendo que existen dos representaciones del “snapshot” de banda ancha, la temporal en (I.32) o la frecuencial en (I.31), como podrá verse mas adelante, dependiendo del compromiso calidad/complejidad cada aplicación requerirá una u otra. Por el momento se ha de considerar ambas como perfectamente validas para definir los datos que van a ser usados por el procesador espacial.

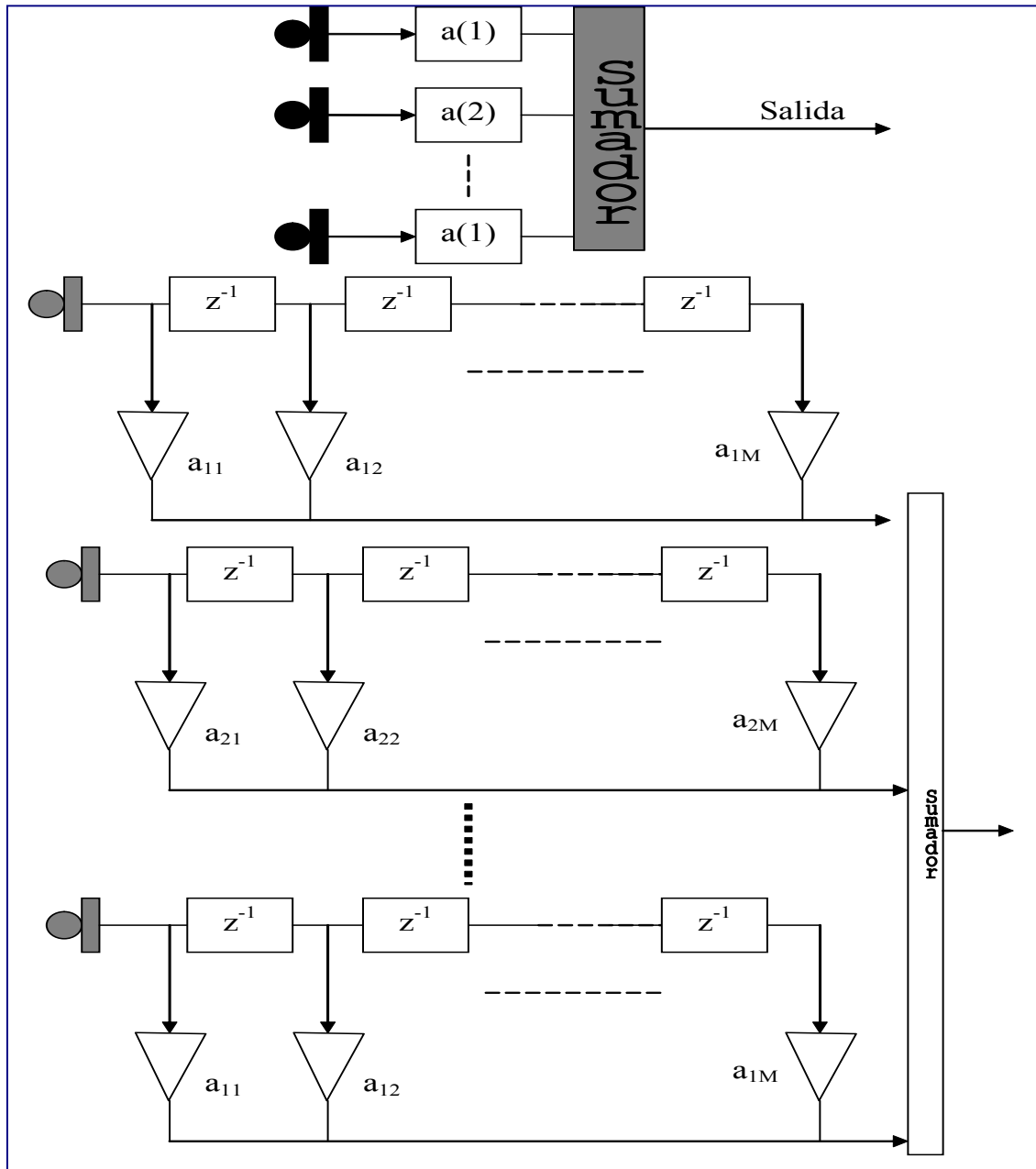


Figura I.11. Esquema de un conformador o procesador FIR espacial, arriba para banda estrecha y debajo para banda ancha.

Antes de pasar al próximo apartado, merece la pena representar como sería un FIR para un sistema de banda estrecha y para un sistema de banda ancha. En la Figura I.11, pueden verse como serían estos filtros que, al controlar la respuesta espacial de la apertura de los denominados conformadores de haz o ‘beamformers’. También merece destacar como el procesamiento de arrays de banda ancha entraña en sí el problema de procesamiento de imagen que más ingeniería ha consumido y consume en aplicaciones de observación de la tierra desde satélite y cartografía de microondas en general. Se ha de mencionar que el procesamiento de banda ancha fue el primero en desarrollarse en el ámbito de sonar. Ni siquiera, la explosión del procesamiento en radar (1979) y en comunicaciones vía satélite y móviles (1982, 1994) con los denominados “front-ends” avanzados y las mal denominadas antenas inteligentes (“smart antenna”) han conseguido superar el número de aplicaciones, desarrolladas industrialmente, de banda ancha en radar y sonar.

## 1.5 LA MATRIZ DE COVARIANZA.

Como se mencionó en el apartado anterior, el “snapshot” es básicamente la suma de las contribuciones de varias fuentes, más ruido, que emiten señales, de comunicaciones por ejemplo, lo que les confiere una naturaleza aleatoria a cada componente y al “snapshot” en su globalidad.

Es obvio que tanto la selección de la forma de onda de una fuente (filtrado espacial), como tratar de conocer la posición de cualquier fuente (estimación de ángulo de llegada), requerirá el trabajar con funciones asociadas a este proceso estocástico de estructura vectorial que es el “snapshot”. Por lo que se hace necesario el caracterizar el “snapshot” vía sus momentos: Media y matriz de covarianza.

Para explicarlo de otro modo, la posición de la fuente, como se ha visto, firma en la diversidad espacial según un retardo diferencial entre sensores, que depende de su posición. Esto quiere decir que la localización pasaría por estimar tiempo de retardo (o tiempo de llegada (TOA)) entre las señales recibidas en los sensores de la apertura. Como es bien conocido, la medida de tiempo de retardo ha de realizarse vía la correlación cruzada. En consecuencia, el interés está en correlaciones cruzadas entre sensores  $q$  y  $p$  de la forma:

$$r(q, p) = E[x_q(t) \cdot x_p^*(t)] \quad (I.36)$$

Donde se asume la estacionariedad de las fuentes presentes en el escenario, así como para el ruido térmico de los sensores. Un paso más adelante sería usar todas las correlaciones cruzadas posibles y agruparlas en una matriz de  $Q \times Q$  ya que todas ellas contienen la información deseada. Como veremos esta es la información de orden dos que se ha de preservar del proceso y la información básica a manejar en cualquier diseño.

Se escribirá de nuevo por comodidad de la presentación la formulación tanto vectorial como matricial del “snapshot”.

$$\underline{X}_n = \sum_{s=1}^{MS} \underline{a}_s(n) \cdot \underline{S}_s + \underline{w}_n \quad (I.37.a)$$

$$\underline{X}_n = \underline{A} \cdot \underline{a}_n + \underline{w}_n \quad (I.37.b)$$

Respecto al momento de orden uno o valor esperado, es habitual que tanto el proceso de las fuentes como el ruido tengan media nula por lo que el valor esperado del “snapshot” será el vector cero.

$$E[\underline{X}_n] = \underline{0} \quad (I.38)$$

En lo que se refiere al momento de segundo orden o matriz de covarianza esta se forma vía la inclusión en una matriz, que se denominará  $\underline{R}$ , la expresión (I.36) para cada uno de sus elementos. Una manera rápida de formular esta matriz es como se indica en (I.39).

$$\underline{R} = E[\underline{X}_n \cdot \underline{X}_n^H] \quad (I.39)$$

Al introducir la formulación (I.37.a) del “snapshot” y después de tener en cuenta que el ruido térmico es independiente de un sensor a otro y, por supuesto, independiente de las señales de fuente, se obtiene (I.41) que es la expresión de la matriz de covarianza del escenario.

$$\begin{aligned} E[\underline{w}_n \cdot \underline{w}_n^H] &= \sigma^2 \cdot \underline{I} \\ E[\underline{w}_n \cdot \underline{a}_n^H] &= \underline{0} \\ E[\underline{a}_s(n) \cdot \underline{a}_r^*(n)] &= P_s \cdot \delta(s,r) \quad \text{fuentes incorreladas o independientes} \end{aligned} \quad (I.40)$$

$$\underline{R} = \sum_{s=1}^{NS} P_s \cdot \underline{S}_s \cdot \underline{S}_s^H + \sigma^2 \cdot \underline{I} \quad (I.41)$$

También puede expresarse en función de la matriz de DOA y la matriz de autocorrelación de las fuentes como

$$\underline{R} = \underline{A} \cdot E[\underline{a}_n \cdot \underline{a}_n^H] \cdot \underline{A}^H + \sigma^2 \cdot \underline{I} = \underline{A} \cdot \underline{P} \cdot \underline{A}^H + \sigma^2 \cdot \underline{I} \quad (I.42)$$

para fuentes no coherentes o incorreladas

$$= \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & \underline{S}_2 & \dots & \underline{S}_{NS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{NS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S}_1^H \\ \underline{S}_2^H \\ \dots \\ \underline{S}_{NS}^H \end{bmatrix} + \sigma^2 \cdot \underline{I}$$

En primer lugar se observa, como es habitual, que la composición de la matriz revela la existencia de un primer término de señal y un segundo de ruido. El segundo término es una matriz de rango completo; mientras que, el primero, es una matriz formada en base a NS vectores independientes (los de dirección de cada una de las fuentes), por lo que dicho término, denominado matriz de covarianza de señal, será de rango NS igual al número de fuentes. Esta propiedad, aparentemente sin mayores consecuencias en este momento, se vuelve de una gran importancia cuando en un escenario se da la circunstancia de que dos fuentes son coherentes, es decir, su correlación cruzada es distinta de cero. Antes de entrar en la problemática de escenarios con fuentes coherentes, vale la pena insistir que el acceso del diseñador al número de fuentes presentes en un escenario viene determinado por su capacidad de estimar la matriz de covarianza de señal y a continuación su rango.

Veamos el impacto de que las fuentes no sean independientes. Seleccionando, por ejemplo, las fuentes 1 y 2 ( $s=1$  y  $s=2$ ) con potencias  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente, si estas dos fuentes no son incorreladas tendrán una correlación cruzada diferente de cero.

$$\begin{aligned} E[|s_1(t)|^2] &= P_1 \\ E[|s_2(t)|^2] &= P_2 \\ E[s_1(t) \cdot s_2^*(t)] &= \rho \cdot \sqrt{P_1 \cdot P_2} \end{aligned} \quad (I.42)$$

El que la correlación cruzada sea diferente de cero conlleva que los términos (1,2) y (2,1) de la matriz de fuentes sean distintos de cero, tal y como se indica en (I.43).

$$\begin{bmatrix} P_1 & \rho \sqrt{P_1 \cdot P_2} & \dots & 0 \\ \rho^* \sqrt{P_1 \cdot P_2} & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{NS} \end{bmatrix} \quad (I.43)$$



Es claro que, a medida que el coeficiente de correlación se acerca a la unidad, el rango de la matriz se hace deficiente (menor que su dimensión) y la apertura se comportara como si tan solo existiesen  $N-1$  fuentes. Es decir, cualquier diseño a partir de la matriz de covarianza, en esta situación, subestimara el numero de fuentes. El lector ha de recordar, que la matriz de covarianza se ha de estimar y que, por lo tanto, para observar deficiencias de rango, debido a problemas de estimación, basta que el coeficiente  $\rho$  este próximo a la unidad para que los mencionados problemas aparezcan. También es destacar que el colapso del rango es debido a la coherencia de las señales recibidas desde dos direcciones diferentes o "steering vectors" independientes. Esta situación se encuentra en comunicaciones cuando se da la presencia de "multipath" especular en el escenario. Recuerde de nuevo que no necesariamente ha de ser completamente especular para observar el colapso del rango a partir de la matriz de covarianza estimada.

Como podrá verse en capítulos sucesivos el colapso del rango de la matriz de fuentes acarrea graves problemas a la mayor parte de las técnicas de procesado de arrays, por esta razón se ha de establecer el procedimiento para evitar que la presencia de fuentes coherentes degrade el procesador espacial correspondiente.

Antes de entrar en los procedimientos de restitución del rango, aunque ya se ha expuesto en procesado de señal, se recordara la manera en que la matriz de covarianza es estimada a partir de los snapshots. Dados  $N$  snapshots  $\underline{X}_n$  ( $n=1,N$ ), el valor de la matriz de covarianza es (I.44).

$$\underline{\underline{R}} = E[\underline{X}_n \cdot \underline{X}_n^H] \quad (I.44)$$

El estimador en bloque, para una longitud de  $N$  snapshots será (I.45).

$$\hat{\underline{\underline{R}}}_n = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \underline{X}_{n-q} \cdot \underline{X}_{n-q}^H \quad (I.45)$$

Donde el subíndice  $n$  indica el "snapshot" mas reciente utilizado en la estimación. Nótese que el estimador se forma por la suma de matrices de rango uno, con lo que es imposible que la matriz estimada sea de rango completo si  $N$  no es superior a la dimensión de la matriz de covarianza o numero de elementos de la apertura. Como regla practica se asume que el numero de snapshots mínimo, con mínimas garantías de calidad, requiere ser, al menos, tres veces mayor que la dimensión de la apertura (numero de elementos).

Una manera mas eficiente de implementar el estimador de la matriz de covarianza es vía la recursión (I.47).

$$\hat{\underline{\underline{R}}}_n = \beta \cdot \hat{\underline{\underline{R}}}_{n-1} + (1 - \beta) \cdot \underline{X}_n \cdot \underline{X}_n^H \quad (I.47)$$

Al tratarse de una recursión, el factor exponencial  $\beta^n$  de su respuesta impulsional provoca que la memoria del sistema sea infinita estrictamente hablando. No obstante, una buena medida de la longitud  $N$  efectiva de la recursión anterior se obtiene de (I.48).

$$N_{efectiva} = \frac{1}{1 - \beta} \quad (I.48)$$

No merece la pena aquí volver a describir las propiedades de este estimador que pueden encontrarse en cualquier referencia sobre el tema. Vista la manera de estimar la matriz de covarianza, se pasara a continuación a describir los procedimientos de restitución de rango cuando la apertura se encuentra en un escenario con al menos dos fuentes coherentes.

## I.6 PROMEDIADO ESPACIAL

La presencia de fuentes coherentes, como se ha mencionado, puede provocar la disminución del rango de la matriz de covarianza. Es necesario el conocer de qué manera puede paliarse este efecto.

El procedimiento se denomina “sub-arraying” y consiste en disponer los elementos linealmente, planar o espacialmente de forma que la apertura global tenga una geometría en la que una apertura básica es repetida vía desplazamientos en el espacio. Para ilustrar la geometría mencionada, en la Figura I.12, se representa la arquitectura necesaria para proceder a "subarraying". Note que un sistema SAR consigue el mismo efecto con una sola apertura en movimiento. Una vez se dispone de estas sub-aperturas gemelas, cada una de las sub-aperturas genera una matriz de covarianza. En concreto la que esta en el centro de fase tendrá la estructura siguiente:

$$\underline{R}_{o} = \left[ \underline{S}_1, \underline{S}_2, \dots, \underline{S}_{NS} \right] \begin{bmatrix} P_1 & \rho & \cdot & 0 \\ \rho & P_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & P_{NS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S}_1^H \\ \underline{S}_2^H \\ \cdot \\ \underline{S}_{NS}^H \end{bmatrix} + \sigma^2 \underline{I} \quad (I.49)$$

Es decir, la misma que hasta el momento, y manifestando en su estructura la presencia de los términos cruzados debido a la coherencia de las dos primeras fuentes.

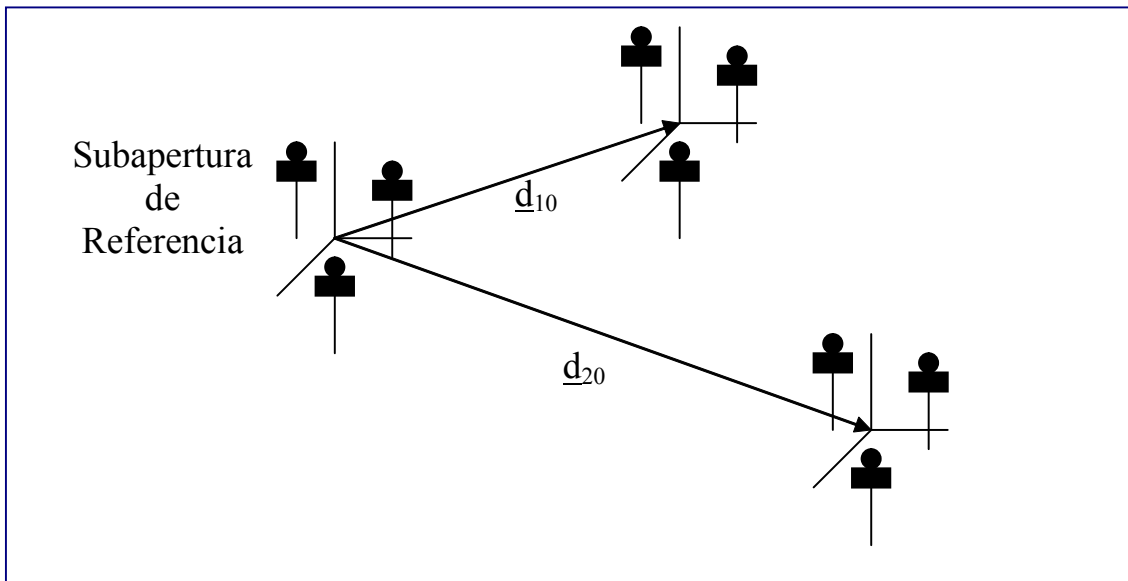


Figura I.12. Apertura formada por replicas de una sub-apertura de tres elementos, y que se toma de referencia, con indicación de los vectores de desplazamiento.

Cuando se procede a calcular la matriz estimada para la sub-apertura 1, se encuentra que la única diferencia es que los nuevos “steering vectors” tienen un incremento, dado por el vector  $\underline{d}_{10}$  de separación entre la sub-apertura considerada y la de referencia. Dado que el elemento  $q$  del steering vector de cualquier fuente  $s$  viene dado por (I.50).

$$\underline{S}_s(q) = \exp(j \underline{k}_s \cdot \underline{r}_q) \quad (I.50)$$

Donde la exponencial la forma el producto escalar del vector de fuente por el vector de posición del sensor; que puede relacionarse una apertura a la otra por (I.51).

$$\underline{r}_{q,1} = \underline{r}_{q,0} + \underline{d}_{10} \quad (I.51)$$

En definitiva, puede escribirse que los “steerings” de la sub-apertura 1 están relacionados con los de la apertura 0 vía un factor.

$$\underline{S}_{s,1} = \exp(j \underline{k}_s \cdot \underline{d}_{10}) \cdot \underline{S}_s \quad (I.52)$$

De lo anterior puede concluirse que la sub-apertura 1, tiene una estructura similar a la de referencia según se indica a continuación:

$$\underline{\underline{R}}_1 = [\underline{S}_1, \underline{S}_2, \dots, \underline{S}_{NS}] \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{NS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \rho & \dots & 0 \\ \rho & P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{NS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{NS}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S}_1^H \\ \underline{S}_2^H \\ \vdots \\ \underline{S}_{NS}^H \end{bmatrix} + \sigma^2 \underline{\underline{I}}$$

O bien según (I.53), ya que el modulo de los coeficientes  $g_i$  es la unidad como puede verse en (I.52).

$$\underline{\underline{R}}_1 = [\underline{S}_1, \underline{S}_2, \dots, \underline{S}_{NS}] \begin{bmatrix} P_1 & \rho \cdot g_1 \cdot g_2^* & \dots & 0 \\ \rho \cdot g_1^* \cdot g_2 & P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{NS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S}_1^H \\ \underline{S}_2^H \\ \vdots \\ \underline{S}_{NS}^H \end{bmatrix} + \sigma^2 \underline{\underline{I}} \tag{I.53}$$

En definitiva, si se suman las matrices de covarianza de todas las NA sub-aperturas, las fuentes incoherentes al igual que el ruido aumentan su nivel en  $10 \log NA$ , por lo que la relación señal a ruido se mantiene igual a la de una de las sub-aperturas. La ganancia se obtiene también para las fuentes coherentes que ven como sus respectivas potencias aumentan en el nivel mencionado. Este no es el caso para los términos fuera de la diagonal, como se expresa en (I.54).

$$\left\{ \sum_{na=0}^{NA-1} \exp[j \cdot (\underline{k}_1 - \underline{k}_2) \cdot \underline{d}_{na,0}] \right\} < NA \tag{I.54}$$

De hecho, este termino puede llegar hasta anularse dependiendo de los DOAs de las fuentes y del espaciado entre las sub-aperturas.

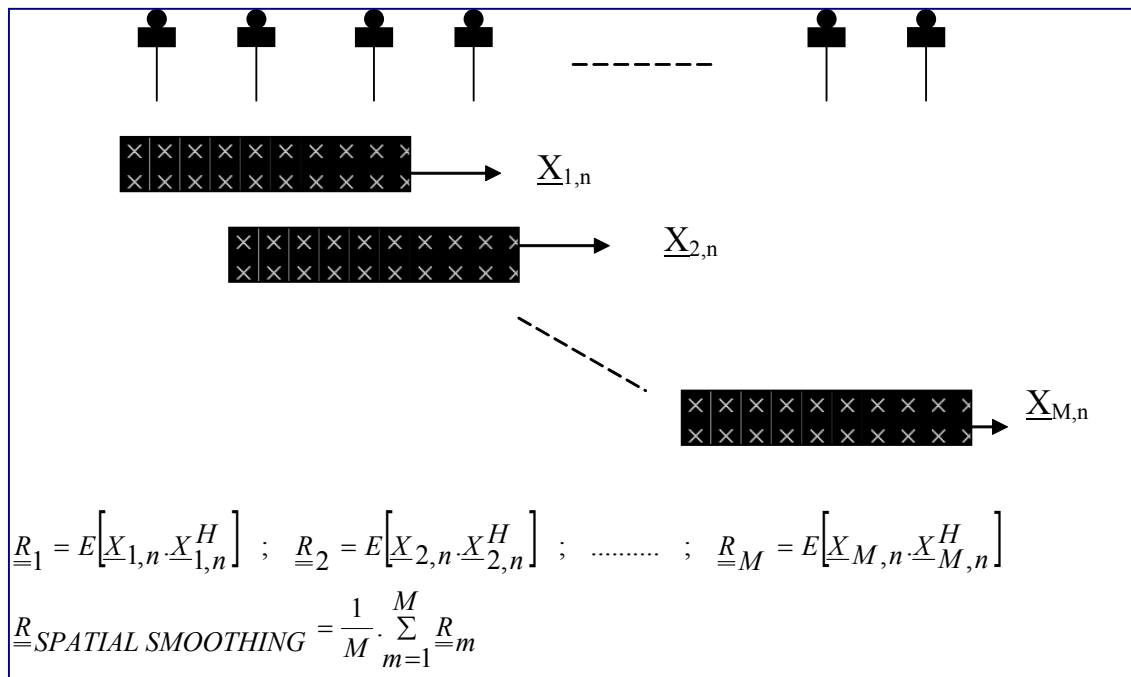


Figura I.13. Promediado espacial en un apertura lineal uniforme con solapamiento de dos sensores entre las sub-aperturas seleccionadas.

En definitiva el promediado espacial ("spatial smoothing") siempre acarrea la disminución de los términos fuera de la diagonal, restituyendo el rango de la matriz de fuentes, aun cuando estas están completamente correladas. El precio que se paga es que, la sub-apertura es, claro esta, de una dimensión física o tamaño siempre menor que la apertura global, y esto implica menor resolución espacial y una capacidad menor del correspondiente procesador espacial. Además esta el problema de que se ha de mantener la correcta calibración de todas las sub-aperturas.

Es de mencionar que el "spatial smoothing" es fácil de llevar a cabo en aperturas que presentan regularidad espacial, en el caso de SAR iluminando el mismo blanco desde una plataforma a velocidad uniforme. En la Figura I.13, se muestra un array ULA, en este caso el numero de sub-aperturas gemelas a utilizar en el promedio admite el solapamiento de sensores. La figura muestra una apertura lineal y equiespaciada en la que se forman sub-aperturas (snapshots) de tamaño  $Q$  con un solapamiento de distancia  $D$  entre estas.

La reducción en la coherencia de fuentes después de el promediado espacial es sencilla de calcular y se deja al lector el concluir las ventajas que presenta una apertura altamente regular como arrays ULA.

Nótese que retículas rectangulares o hexagonales, como muestra la figura I.14 también facilitarían el realizar gran numero de promedios sin sacrificar excesivamente el tamaño original de la apertura, es decir, sin elegir sub-aperturas de tamaño muy reducido.

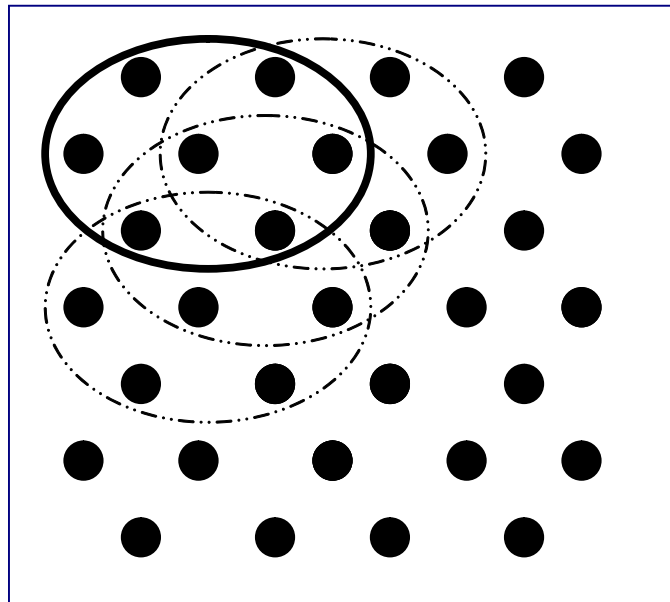


Figura I.14. Apertura planar, de muestreo espacial entrelazado o hexagonal centrado, mostrando la sub-apertura básica y admitiendo replicas con desplazamiento horizontal y vertical.

Hasta el momento se ha expuesto como se realiza promediado espacial en arrays de banda estrecha. Básicamente, ha de recordarse que el procedimiento, fracciona el "snapshot" original en replicas diferenciadas unas de otras en un desplazamiento.

Teniendo presente este procedimiento básico, puede entenderse que el promediado para la restitución de rango es mucho mas flexible en banda ancha que en banda estrecha. Si se considera una apertura ULA en banda ancha, de  $Q$  sensores por  $M$  retardos (ver Figura I.11), el "snapshot" de banda ancha será un vector de  $M \times Q$  componentes. Este "snapshot" no es mas que agrupar, por columnas o por filas, la matriz de  $Q$  por  $M$  elementos que el muestreo espacio-temporal proporciona en el caso de banda ancha.

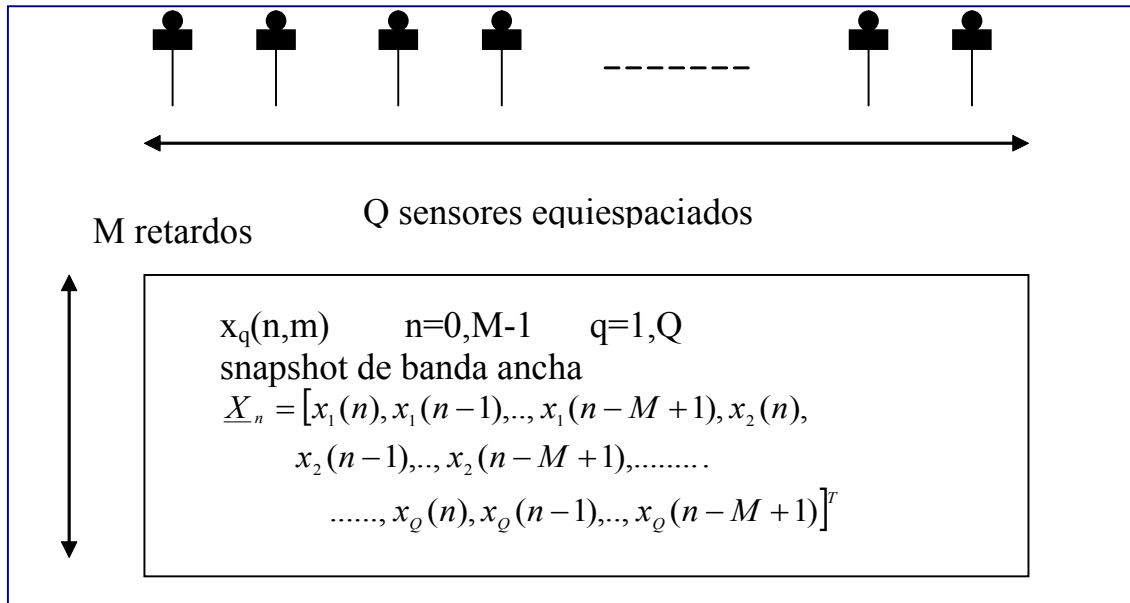


Figura I.14. formación del “snapshot” en una apertura para banda ancha.

Con lo anterior se ha querido insistir en la implicación entre una matriz de banda ancha y la formación del correspondiente “snapshot”. Claramente una división en sub-aperturas conlleva el dividir el “snapshot” en “snapshots” gemelos; o bien, dividir la matriz de  $Q \times M$  en submatrices gemelas. Una manera de llevar a cabo la citada descomposición es considerar la imagen de la Figura I.14, que daba lugar al “snapshot” de banda ancha, en sub-imágenes, tal y como se indica en la Figura I.15. Cada una de estas sub-imágenes dan lugar a un “snapshot” de banda ancha y las correspondientes matrices de covarianza promediadas restituyen el rango. Así pues, es de destacar que el aspecto de sub-aperturas gemelas es extendido ahora no solo a su dimensión espacial sino temporal. Cada una de las sub-imágenes de la Figura I.15 es el “snapshot” de una apertura de banda ancha de tres elementos y dos retardos (3 muestras por sub-apertura..

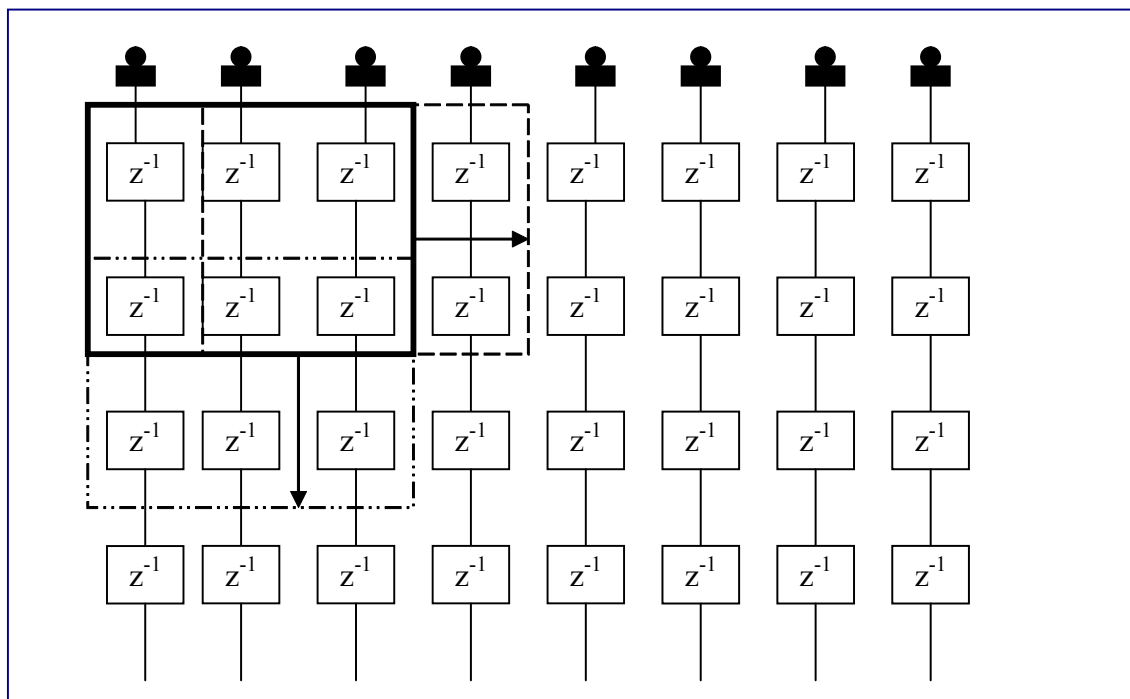


Figura I.15. Apertura de banda ancha de 8 sensores y 5 muestras por sensor. En trazo grueso sub-apertura de 3 elementos y tres muestras por elemento. Desplazando verticalmente y horizontalmente la plantilla se obtienen sub-aperturas gemelas para el promediado de sus respectivas matrices de covarianza.

El aspecto mas relevante es que en el procesado de banda ancha, para promediar no es necesario recurrir a la dimensión espacial sino que basta realizar el promediado en la dimensión temporal solamente. En otras palabras, refiriéndose a la misma Figura I.15, la sub-apertura básica podría haber sido una de 8 sensores y, digamos dos retardos. En este caso se podrían promediar hasta 3 sub-aperturas de 8 por 2 (3 muestras) cada una (ver Figura (I.16)).

Una vez visto como puede llevarse a cabo la subdivisión en sub-aperturas para el caso de banda ancha, en base a su diversidad temporal, es interesante indicar como seria el dual frecuencial del proceso llevado a cabo hasta ahora pero en el plano espacio-frecuencia en lugar del espacio-tiempo. Lo que es mas importante, el promedio en el plano frecuencial no requiere la perdida de resolución de las sub-aperturas, ya que estas son solo consideradas en el eje frecuencial y no en el temporal.

El plano dual al promediado temporal, se obtiene, tal y como se indico en la Figura I.10, cuando de la señal de cada sensor se aplica una DFT para obtener N 'beams' de frecuencia por cada sensor e instante n. Recuperando la formulación, se partirá de la colección de las señales de N muestras recolectadas en cada uno de los Q sensores.

Una formulación útil para el caso de banda ancha es considerar el "snapshot" de banda estrecha que, a cada frecuencia o pulsación w, genera el banco de filtros o DFT. El "snapshot" de banda estrecha, formado por las Q salidas de la DFT en cada sensor a la frecuencial w igual a  $2\pi \cdot l/N$  (l=0, N-1) producirá la siguiente matriz de covarianza:

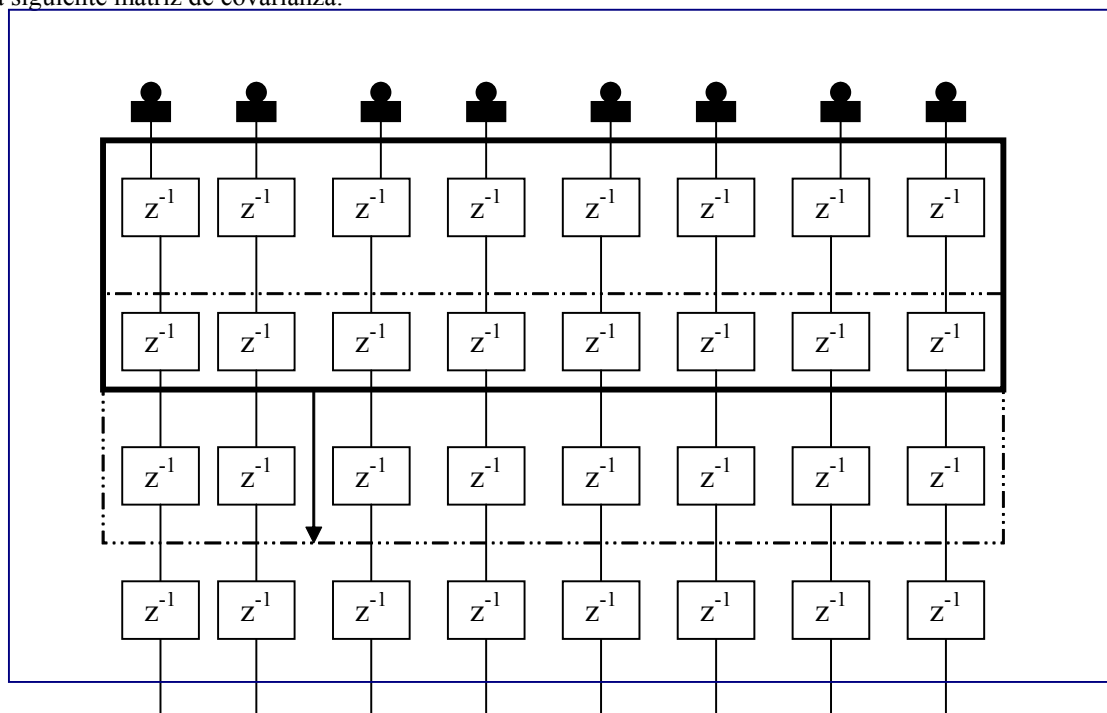


Figura I.16. Promediado con sub-aperturas usando tan solo la dimensión temporal del snapshot de banda ancha. De la apertura de la figura se obtendrían tres matrices de covarianza para promediar.

$$\underline{\underline{R}}_w = E[\underline{X}_w \cdot \underline{X}_w^H] \tag{I.55}$$

Es claro pues que la DFT o el banco de filtros producen una matriz de covarianza a cada frecuencia central de los filtros o en cada "beam" de la DFT. De este modo, se puede realizar promediado directamente de estas matrices de covarianza cubriendo un ancho de banda determinado. El tamaño del ancho de banda, teniendo en cuenta que el "steering" de cada fuente depende de la frecuencia, viene determinado por el margen de frecuencias en el que puede considerarse que el "steering" de la fuente no

ha cambiado. En otras palabras, el ancho de banda donde se promedian snapshots es el que cumpliría la condición de banda estrecha expuesto con anterioridad.

Con el fin de proporcionar mas detalles sobre la formulación frecuencial del problema de banda ancha, nótese que el “snapshot” de banda estrecha  $\underline{X}_w$  tendrá la formulación de (I.56).

$$\underline{X}_w = \sum_{s=1}^{NS} A_s(w) \cdot \underline{S}_s(w) + \underline{W}_w \quad (I.57)$$

Siendo  $A_s(w)$  la transformada de Fourier de la señal de la fuente  $s$  a la pulsación  $w$ ,  $\underline{S}_s(w)$  es el vector de “steering” de la fuente  $s$  (note que el DOA, elevación y azimut son iguales para todas la frecuencias) a la frecuencia  $w$ .

$$\underline{S}_s^T(w) = \left[ \dots, \exp(-j \frac{w}{c} \cdot d_q \cdot \sin(\theta_s) \cdot \cos(\varphi_s - \varphi_q)), \dots \right] \quad q = 1, Q \quad (I.58)$$

Finalmente, el vector  $\underline{W}_w$  es la transformada de Fourier del ruido a la pulsación  $w$ .

Cada colección de snapshots, formulados como (I.57), da lugar a una matriz de covarianza como se indica a continuación y que posee, salvo su dependencia con la frecuencia, una estructura idéntica a la matriz de covarianza para una apertura de banda estrecha.

$$\underline{\underline{R}}_w = \sum_{s=1}^{NS} S_s(w) \cdot \underline{S}_s(w) \cdot \underline{S}_s^H(w) + \sigma^2(w) \underline{\underline{I}} \quad (I.59)$$

Donde  $S_s(w)$  es la densidad espectral de potencia de la fuente  $s$  a la pulsación  $w$ .

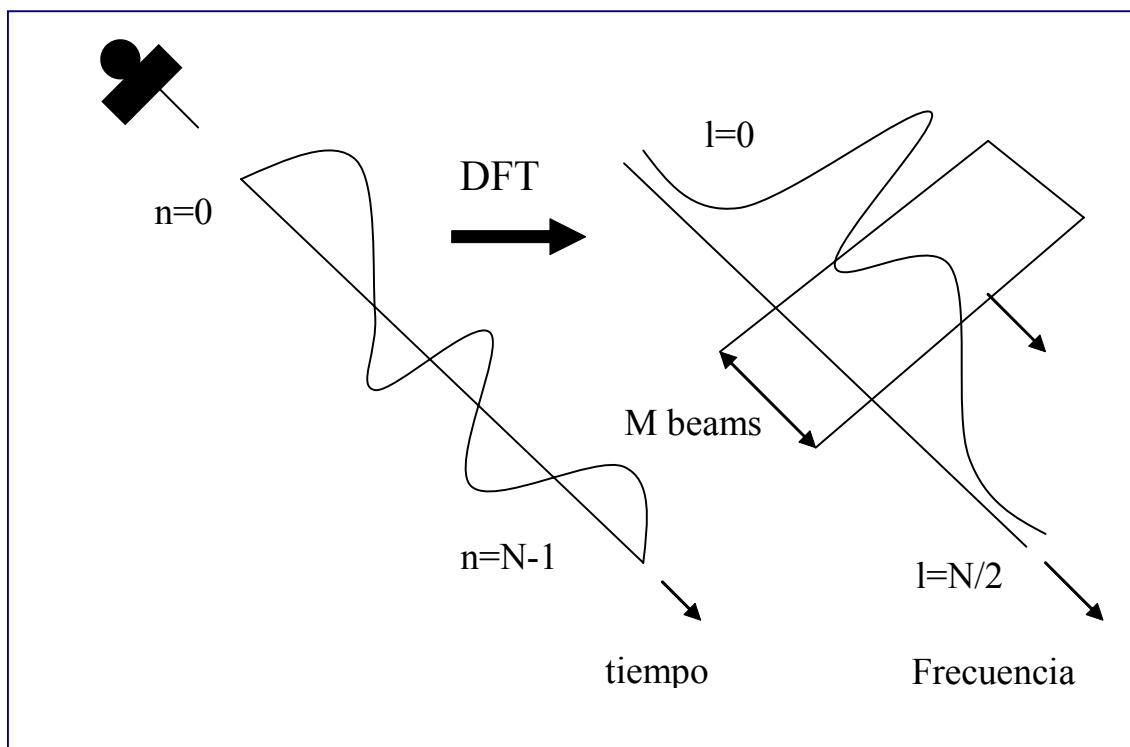


Figura I.17. Promediado en el dominio frecuencial con frecuencias en las que se mantiene la condición de banda estrecha.

De la formulación expuesta es interesante destacar que de un análisis frecuencial se obtienen tantas matrices de correlación como resolución se toma para el banco de filtros o DFT. En el caso de que

la resolución sea mayor que el ancho de banda necesario para la consideración de banda estrecha de la apertura, puede realizarse promediado entre las matrices a frecuencias contiguas para eliminar los problemas de fuentes coherentes. Nótese que, si la fuente uno y la dos son coherentes a la frecuencia  $w$ , la matriz de covarianza mostrara dos términos adicionales a los de la expresión (I.59), que se indican en (I.60).

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}}_w &= \sum_{s=1}^{NS} \underline{S}_s(w) \cdot \underline{S}_s^H(w) + \\ &+ S_{12}(w) \cdot \underline{S}_1(w) \cdot \underline{S}_2^H(w) + S_{21}(w) \cdot \underline{S}_2(w) \cdot \underline{S}_1^H(w) + \\ &+ \sigma^2(w) \cdot \underline{\underline{I}} \end{aligned} \quad (I.60)$$

Siendo  $S_{12}(w)$  la densidad espectral cruzada de las señales de las fuentes 1 y 2. Son precisamente estos términos los que, al promediar matrices de covarianza, se ven reducidos cuando no eliminados completamente.

También es de destacar que, como se vera en el Capitulo III, dado que el promediado es una operación habitual en el proceso de fuentes de banda ancha, el problema de fuentes coherentes no es tan grave en este caso como lo es en banda estrecha. De hecho, puede verse que, salvo que la coherencia espectral se mantenga en todo el ancho de banda, la restitución de rango no conlleva el ampliar el numero de elementos si el análisis se lleva a cabo en frecuencia.

Otra posibilidad cuando las fuentes mantienen su coherencia en un margen o ancho de banda  $B$ , pero no así las provocadas por multi-propagación, es realizar el promedio directamente a nivel de "snapshot". La Figura I.17 ilustra este caso de promedio directo al nivel de snapshot en un ancho de banda equivalente a  $M$  líneas de la DFT de la señal de sensor.

## I.7 CONCLUSIONES

En este capitulo se ha presentado las similitudes existentes entre diversidad temporal y espacial. Se ha insistido que la diversidad espacial es mucho mas rica, y su vez mas complicada de procesar, que la diversidad temporal. Aspectos como muestreo en tres dimensiones, muestreo no equi-espaciado, muestras no calibradas etc. enriquecen y marcan diferencias sustanciales entre los métodos de procesado de señal para diversidad en frecuencia/tiempo con respecto al proceso de diversidad espacial.

Después de una revisión de los parámetros fundamentales tanto de la fuente como de la apertura, se caracteriza la señal recibida en el sensor, partiendo de la hipótesis de campo lejano, para un escenario cualquiera. De este modo, aparece el concepto de "snapshot" que no es mas que la firma del escenario en la apertura en un instante fijado de tiempo. Ante la aparición de dos tiempos de retardo el de grupo y el de fase, se pasa a definir lo que se denomina array de banda ancha y array de banda estrecha. Tras un breve análisis se define que se esta en un análisis de banda estrecha cuando el retardo de grupo de cualquier fuente a lo largo de la apertura es despreciable.

A continuación, dado que el snapshot no es mas que un vector de variables aleatorias en sus componentes, se pasa a trabajar con su momento de segundo orden, la denominada matriz de covarianza. Se detalla la estructura de esta, separando en su formulación la denominada matriz de fuentes de la también denominada matriz de DOAs o matriz de direcciones de llegada, también denominada matriz de "steerings", por contener los vectores de posición de cada fuente ("steering"). El ruido de sensor aparece como espacialmente incorrelado. Por esta razón, en procesado de arrays se ha de especificar a que dominio afecta el carácter blanco. Note que una fuente emitiendo ruido blanco, a efectos de la apertura, se recibirá ruido blanco temporal pero a nivel espacial vendrá de una única dirección. El ruido térmico de cada interfase con el medio será blanco temporalmente y blanco espacialmente por estar incorrelado de sensor a sensor.

Partiendo de la estructura de la matriz de covarianza, se introduce la problemática de fuentes coherentes. La solución al problema de fuentes coherentes es el denominado spatial smoothing. Las técnicas de promediado espacial, en primer lugar en banda estrecha y después en banda ancha cierran el tema dedicado a introducir la formulación básica para procesado de arrays.



**I.8 REFERENCIAS**

S. Haykin. "Array signal processing". Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. , 1985.

R.A. Monzingo, T.W. Miller. "Introduction to adaptive arrays", John Wiley & Sons, 1980.

B.D. Van Been, K.M. Buckley. "Beamforming: A versatile approach to spatial filtering. IEEE ASSP Magazine, pp. 4-24, April 1989.

G.H. Golub, Van Loan. "Matrix Computations". Baltimore, MD Johns Hopkins Univ. Press. 1984.

L. Clayton, J.S. Hollis. "Calculation of microwave antenna radiation systems by the Fourier integral method", The Microwave Journal, pp. 59-65, Sept. 1960.

J.W. Horton, "Fundamentals of sonar", United States Naval Institute, 1957.

H.G.Booker, P.C. Clemmow. "The concepts of an angular spectrum of plane waves, and its relation to that of polar diagram and aperture distribution". Proc. IEE, Vol. 97, Part 3, pp.11-17, 1950.

(\*) A. Winders, C.J. Loda. "Space-Time information processing". Peninsula Publ. Los Altos, California, ISBN 0-932146-X, October 1962.